



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.









# ARCHIV

der

# MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht  
auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren  
Unterrichtsanstalten.

---

Gegründet von  
**J. A. Grunert,**

fortgesetzt von  
**R. Hoppe.**

Zweihundsechzigster Teil.

---

Leipzig.  
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,  
J. Sengbusch.

1878.

**162489**



# Inhalts-Verzeichniss

## des zweiundsechzigsten Teils.

---

Jeder Abhandlung.	Heft.	Seite.
<b>Geschichte der Mathematik und Physik.</b>		
V. Inedita Copernicana. Aus den Handschriften in Berlin, Frauenburg, Upsala und Wien herausgegeben von Maximilian Curtze . . . . .	II.	113
XXIV. Fortsetzung . . . . .	IV.	337
<b>Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.</b>		
I. Die Sturm'schen Functionen zweiter Gattung. Von Heinrich Wendlandt . . . . .	I.	1
VIII. Summation einiger Reihen. Von R. Hoppe . .	II.	165
X. Sur les fractions continues périodiques. Par P. Appell . . . . .	II.	183
XII. Beitrag zum Interpolationsproblem. Von Carl Bartl . . . . .	II.	202
XIII. Entwicklung von $\log(1+x)$ . Von W. Fuhrmann . . . . .	II.	220
XIV. Einleitung in die Theorie der Substitutionen und ihre Anwendungen. Von E. Netto . . . . .	III.	225
XVI. Vergleichung zweier Annahmen über die moralische Bedeutung von Geldsummen. Von Emanuel Czuber . . . . .	III.	267
XX. Die geschlossene Form der periodischen Kettenbrüche. Von K. E. Hoffmann . . . . .	III.	310
XXIII. Zur Summierung einer Reihe. Von Ligowski .	III.	334



<b>Nr der Abhandlung:</b>		<b>Heft.</b>	<b>Seite.</b>
<b>XIII.</b>	<b>Zwei Sätze von den Flächen zweiten Grades.</b>		
	Von R. Mehmke . . . . .	II.	214
<b>XV.</b>	<b>Ableitung der Centralprojection aus einer cotirten</b>		
	<b>Orthogonalprojection. Von Emanuel Czuber.</b>	III.	259
<b>XVII.</b>	<b>Propriétés relatives des polyèdres réguliers, qui sont</b>		
	<b>conjugués entre eux. Par Georges Dostor .</b>	III.	285

### **Trigonometrie.**

<b>XIII.</b>	<b>Berechnung der dritten Seite eines Dreiecks aus</b>		
	<b>zwei gegebenen Seiten und dem von diesen ein-</b>		
	<b>geschlossenen Winkel. Von E. Czuber. . . .</b>	II.	222
<b>XXIII.</b>	<b>Beitrag zur Trigonometrie. Von K. Zahradnik</b>	III.	330

### **Mechanik.**

<b>XIX.</b>	<b>Bewegung eines am Faden hangenden Stabes.</b>		
	Von R. Hoppe . . . . .	III.	296
<b>XXIII.</b>	<b>Correctionsgewichte. Von A. Verbeek . . . .</b>	III.	333
<b>XXVI.</b>	<b>Bewegung zweier durch einen elastischen Faden</b>		
	<b>verbundener materieller Punkte ohne Einwirkung</b>		
	<b>äusserer Kräfte. Von R. Hoppe . . . . .</b>	IV.	390
<b>XXIX.</b>	<b>Note über den Ausdruck für das innere Potential</b>		
	<b>eines homogenen Ellipsoids. Von A. Wassmuth</b>	IV.	448

### **Optik.**

<b>XI.</b>	<b>Ueber den Weg, den ein Punkt aus einem Medium</b>		
	<b>in das angrenzende in der kürzesten Zeit durch-</b>		
	<b>läuft. Von Carl Bartl . . . . .</b>	II.	189

### **Physik.**

<b>XXV.</b>	<b>Ueber ebene Stromcurven von demselben elektro-</b>		
	<b>magnetischen Potential. Von A. Wassmuth . .</b>	IV.	374

### **Litterarische Berichte.**

<b>CCXLV.</b>	<b>Boncompagni (Bull. X. 7 bis 12.) Gretschel u. Wunder</b>		
	<b>(Jahrb. d. Erfd.) Mansfield Merriman (Litt. kl. Quadr.)</b>		
	<b>G. E. Müller (Psychophys.) Genocchi (Foncencx.) C.</b>		
	<b>Meyer (Ster.) Ohlert (Ster.) Gerlach (Plan.) Mink</b>		



## Berichtigungen .

in Teil LIX.

Seite 289 Zeile 7 v. o. erste Gleich. (56) muss lauten:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = i \sin(v + ic) \varphi' \dots$$

in Teil LXI.

Seite	372	Zeile	2 v. o.	statt de facteur	setze du facteur
373	2	„	s'annulent	„ s'annulant	
374	18	„	déclare	„ déclara	
376	3	„	et par suite	„ par suite	
	7	„	$+x$	„ $-x$	
	18	„	2.4.5...	„ 2.4.6...	
377	5	„	$+2k\log 2$	„ $-2k\log 2$	
	17	„	$dx$	„ $d\alpha$	
378	30	„	principe je	„ principe que je	
382	18	„	demande	„ demanda	
388	13	nach	Stück	„ $MN$	
	15	statt	$PM$	„ $PN$	
391	13	„	als	„ aus	
397	3	„	$\frac{b^2}{a}$	„ $\frac{2b^2}{a}$	
402	5 v. u.	„	$\mathfrak{B}$	„ $L$	

Auf Taf. X. muss der Parabelzweig von *P* nach rechts oben zwischen der Tangente und dem Kreisbogen *PK* liegen.

in Teil LXII.

Seite 325 bis 328 und auf Taf. VII.

Der Name des Verfassers von XXII. ist Mancke.

Litt. Ber. CCXLVI.

Seite 16 Zeile 13 v. u. statt unentbehrlich setze entbehrlich



I.

# Die Sturm'schen Functionen zweiter Gattung.

Von

Herrn Dr. **Heinrich Wendlandt**.

Sturm <sup>1)</sup> bemerkt am Schlusse seiner in der Theorie der numerischen Gleichungen Epoche machenden Arbeit: „Mémoire sur la résolution des équations numériques“ im Artikel 21:

„Il existe encore un autre moyen particulier de former les fonctions auxiliaires, aussi simple que celui qui a été exposé n° 1. Quand on a deux fonctions consécutives,  $V_{n-1}$  et  $V_n$ , on peut former la suivante  $V_{n+1}$ , en divisant  $V_{n-1}$  par  $V_n$ , après avoir ordonné ces polynomes suivant les puissances croissantes de  $x$ , au lieu de les ordonner suivant les puissances décroissantes, comme on a coutume de le faire. La division donnera un quotient de la forme  $p + qx$ , et un reste divisible par  $x^2$ ; en changeant les signes de tous les termes de ce reste, et le divisant par  $x^2$ , on aura la fonction  $V_{n+1}$ , qui est ainsi liée avec  $V_{n-1}$  et  $V_n$  par la relation

$$V_{n-1} = V_n(p + qx) - V_{n+1}x^2.$$

Ainsi, pour obtenir  $V_{n+1}$ , on peut effectuer la division de  $V_{n-1}$  par  $V_n$  de deux manières différentes en ordonnant ces polynomes suivant les puissances décroissantes de  $x$ , ou suivant les puissances croissantes. La combinaison de ces deux procédés donne plusieurs systèmes de fonctions auxiliaires également propres à la résolution de l'équation  $V=0$ ; et de là résultent aussi plusieurs systèmes de quantités dépendantes des coefficients de cette équation, dont les signes font connaître le nombre de ses racines réelles.“





**Es sei**

eine ganze Function  $m$ ten Grades von  $x$ , und  $a_0$  sei  $= 1$ , so dass auch

ist, wenn mit  $x_1, x_2, \dots, x_m$  die  $m$  Wurzeln von  $F(x) = 0$  bezeichnet werden. Es soll ferner der Coefficient von  $x$ ,  $a_1$ , als von Null verschieden vorausgesetzt werden, damit die Constante  $b_0$  des Differentialquotienten von  $F(x)$

$b_0 \gtrless 0$  ist. Beide Functionen,  $F(x)$  wie  $F'(x)$ , seien nach steigenden Potenzen von  $x$  geordnet.

$$(2) \quad F(x), F'(x), F''(x), \dots, F_{r-1}(x), F_r(x)$$
[illegible]

Man dividire  $F(x)$  durch  $F'(x)$ , bis der Quotient  $q_1$  eine lineare Function von  $x$  wird; der verbleibende Rest stellt, wenn man noch den allen Gliedern gemeinsamen Factor  $x^2$  absondert und das Vorzeichen wechselt, die Sturm'sche Function zweiter Gattung  $F_2(x)$  dar. Diese ist also eine ganze Function  $(m-2)$ ten Grades. Allgemein giebt die Division  $F_{n-1}(x)$  durch  $F_n(x)$  den in  $x$  linearen Quotienten  $q_n = \alpha_n + \beta_n x$  und einen Rest, der sich von der Hilfsfunction  $F_{n+1}(x)$  nur durch den Factor  $-x^2$  unterscheidet.

1\*



$$F(x) = \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \cdot T(x)$$

$$F'(x) = \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \cdot T_1(x)$$

$$F_2(x) = \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \cdot T_2(x)$$

$$\dots$$

$$F_r(x) = \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \cdot T_r(x),$$

wo jetzt unter  $T_r(x)$  eine Constante zu verstehen ist. Die Functionen  $T$  sind durch dasselbe System von Gleichungen (3) verbunden, wie die  $F$ , und daher haben sie auch die in den Sätzen 1) und 2) ausgesprochenen Eigenschaften. Ist ferner  $x_k$  eine  $\varepsilon_k$ fache Wurzel von  $F(x) = 0$ , also etwa  $F(x) = \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)^{\varepsilon_k} f(x)$ , so findet man

$$\frac{T(x)}{T_1(x)} = \frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{1 - \frac{x}{x_k}}{-\frac{\varepsilon_k}{x_k} + \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

oder für  $x = x_k \pm \alpha$

$$\frac{T(x_k \pm \alpha)}{T_1(x_k \pm \alpha)} = \frac{F(x_k \pm \alpha)}{F'(x_k \pm \alpha)} = \frac{\mp \alpha}{-\varepsilon_k \mp \alpha \frac{f'(x_k \pm \alpha)}{f(x_k \pm \alpha)}}$$

Diese Gleichung zeigt endlich, dass auch  $\frac{T}{T_1}$  negativ für  $x = x_k - \alpha$  und positiv für  $x = x_k + \alpha$  ist, wenn man  $\alpha$  hinreichend kleine Werte beilegt.

Die Zeichenreihe der Functionen  $F, F', F_2 \dots F_r$  stimmt aber in der Zahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen mit der der Functionen  $T, T_1, T_2 \dots T_r$  überein, da der gemeinschaftliche Factor  $\left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$  die Zeichen nicht ändert, wenn er positiv ist, sie alle in die entgegengesetzten verwandelt, wenn er negativ ist. Wir können uns daher stets an die Zeichenreihe der Functionen  $F, F', F_2 \dots F_r$  halten, einerlei ob die Gleichung  $F(x) = 0$  nur ungleiche oder auch mehrfache Wurzeln besitzt.

Es ergibt sich also allgemein dies Resultat:

Die Zeichenreihe der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung  $\dots F_r$  verliert stets dann und nur dann einen Zeichenwechsel,

wenn die Variable von kleineren zu grösseren Werten übergehend einen Wurzelwert der Gleichung  $F(x) = 0$  passirt.“

und als eine einfache Folge desselben der Sturm'sche Satz:

„Es liegen so viele verschiedene Wurzeln der Gleichung  $F(x) = 0$  zwischen den reellen Grenzen  $a$  und  $b$  ( $a < b$ ), als die Zeichenreihe der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung für  $x = b$  Zeichenwechsel weniger enthält, denn für  $x = a$ .“

Für den Fall, dass die Gleichung  $F(x) = 0$  gleiche Wurzeln besitzt, bleibt noch zu ermitteln, wie vielfach eine aufgefundenene Wurzel derselben  $x_k$  ist. Setzen wir  $T(x) = \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)t(x)$  und  $\frac{dT(x)}{dx} = T'(x)$  so ist

$$\frac{T(x)}{T'(x)} = -\frac{1}{x_k} + \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) \frac{t'(x)}{t(x)}$$

Man dividire diesen Wert von  $\frac{T(x)}{T'(x)}$  durch den oben ermittelten Wert von  $\frac{T(x)}{T'(x)}$ ; es wird

$$\frac{T_1(x)}{T'(x)} = -\frac{\varepsilon_k}{x_k} + \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$= -\frac{1}{x_k} + \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) \cdot \frac{t'(x)}{t(x)}$$

also

$$(4) \quad \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} = \varepsilon_k.$$

Um die Zahl der verschiedenen Wurzeln der Gleichung  $F(x) = 0$  überhaupt zu bestimmen, muss man die Zeichenreihen für  $x = +\infty$  und  $x = -\infty$  bilden; in diesen beiden Zeichenreihen haben aber die Functionen dasselbe Zeichen, welche mit einer geraden, die das entgegengesetzte Zeichen, welche mit einer ungeraden Potenz von  $x$  beginnen.

Im vorliegenden Falle ist die Zahl der Functionen  $F, F', F_2, \dots, F_r$  vollzählig, ihr Grad also abwechselnd gerade und ungerade; daher werden die Functionen abwechselnd ihr Zeichen behalten und verändern, das heisst, einer Zeichenfolge in  $(-\infty)$  entspricht ein Zeichenwechsel in  $(+\infty)$  und umgekehrt. Enthält nun die Zeichenreihe  $(+\infty)$   $i$  Zeichenwechsel, mithin  $m - i$  Zeichenfolgen, so bietet die Zeichenreihe  $(-\infty)$   $m - i$  Zeichenwechsel und  $i$  Zeichenfolgen dar;



Für den Fall, dass die Gleichung  $F(x) = 0$  sitzt, bleibt noch zu ermitteln, wie vielfach eine derselben  $x_k$  ist. Setzen wir  $T(x) = \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)t(x)$  so ist

$$\frac{T'(x)}{T''(x)} = \frac{\left(1 - \frac{x}{x_k}\right)}{-\frac{1}{x_k} + \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) \frac{t'(x)}{t(x)}}$$

Man dividire diesen Wert von  $\frac{T(x)}{T''(x)}$  durch den ob von  $\frac{T(x)}{T'(x)}$ ; es wird

$$\frac{T_1(x)}{T'(x)} = \frac{-\frac{\varepsilon_k}{x_k} + \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) \frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x_k} + \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) \cdot \frac{t'(x)}{t(x)}}$$

also

$$(4) \cdot \quad \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} = \varepsilon_k.$$

Um die Zahl der verschiedenen Wurzeln der  $f$  überhaupt zu bestimmen

die Gleichung  $F(x) = 0$  hat  $m - 2i$  reelle und  $2i$  complexe verschiedene Wurzeln. So ergibt sich der Satz:

„Die Gleichung  $F(x) = 0$  hat soviel verschiedene Paare complexer Wurzeln, als die Reihe der letzten Coefficienten der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung Zeichenwechsel enthält.“

und als einfache Folgen desselben die weiteren Sätze:

1) „Die Reihe der letzten Coefficienten der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung kann höchstens  $\frac{r}{2}$  Zeichenwechsel haben.“

und

2) „Die Gleichung  $F(x) = 0$  hat nur reelle Wurzeln, wenn die letzten Coefficienten der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung sämmtlich positiv sind.“

Die erste und zweite der oben von den Functionen  $F_n(x)$  nachgewiesenen Eigenschaften bestehen noch fort, wenn statt  $F'(x)$  als erster Divisor irgend eine ganze Function  $(m-1)$ ten Grades  $F_1(x)$  verwendet wird; es ist nur vorauszusetzen, dass  $F_1(x)$  mit  $F(x)$  keinen gemeinsamen Factor habe, wenn alle Wurzeln von  $F(x) = 0$  ungleich sind, — dass der grösste gemeinsame Factor von  $F_1(x)$  und  $F(x)$  aber  $= \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$  ist, wenn die Wurzeln  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_m$  Wiederholungen der von einander verschiedenen Wurzeln  $x_1, x_2, \dots, x_r$  sind. Stimmt ausserdem für alle reellen Wurzelwerte von  $F(x) = 0$   $F_1(x)$  mit  $F'(x)$  im Vorzeichen überein, so besitzen  $F$  und  $F_1$  auch die in 3. angegebene Eigenschaft, und es bleibt daher für die aus  $F$  und  $F_1$  abgeleiteten Sturm'schen Functionen zweiter Gattung der Sturm'sche Satz gültig<sup>1)</sup>.

Die wirkliche Herstellung der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung durch wiederholte Division nach dem Schema (3) würde sehr mühselig sein. Man bedient sich zweckmässiger folgenden einfachen Verfahrens<sup>2)</sup>, welches Herr Prof. Stern in seiner Vorlesung „Die Theorie der numerischen Gleichungen“ zu entwickeln pflegt.

Es sei

$$F(x) = a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + \dots + a_{0m}x^m \text{ und}$$

$$F_1(x) = a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + \dots + a_{1m-1}x^{m-1},$$

so wird der Quotient

$$q_1 = \frac{a_{00}}{a_{10}} + \frac{a_{01}a_{10} - a_{00}a_{11}}{a_{10}^2}x,$$

und es kann, wie eine leichte Rechnung zeigt,  $F_2(x)$  in die Form<sup>3)</sup> ~~setzt~~ werden

und verstehen unter  $T_1(x)$  einstweilen eine beliebige ganze Function  $(r-1)$ ten Grades, die jedoch mit  $F(x)$  keinen gemeinsamen Factor haben darf.

Das System (3) giebt diese Gleichungen

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = q_1 - \frac{x^2}{\left(\frac{F_1(x)}{F_2(x)}\right)}$$

$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)} = q_2 - \frac{x^2}{\left(\frac{F_2(x)}{F_3(x)}\right)}$$

. . . . .

$$\frac{F_{r-2}(x)}{F_{r-1}(x)} = q_{r-1} - \frac{x^2}{\left(\frac{F_{r-1}(x)}{F_r(x)}\right)}$$

$$\frac{F_{r-1}(x)}{F_r(x)} = q_r,$$

aus denen sich der Sturm'sche Kettenbruch zweiter Gattung zusammensetzt

$$(6) \quad \frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{T(x)}{T_1(x)} = q_1 - \frac{x^2}{q_2 - \frac{x^2}{q_3 - \dots - \frac{x^2}{q_r}}}, \quad (r \leq m),$$

oder mit Zuhülfenahme der Stern'schen Bezeichnungsweise<sup>1)</sup>

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{T(x)}{T_1(x)} = f(q_1 q_r).$$

Zugleich sieht man, dass

$$\frac{T}{T_1} = \frac{q_1 q_r}{q_2 q_r}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{q_2 q_r}{q_3 q_r}; \quad \dots \quad \frac{T_n}{T_{n+1}} = \frac{q_{n+1} q_r}{q_{n+2} q_r}; \quad \dots \quad \frac{T_{r-1}}{T_r} = q_r$$

und folglich

$$(7) \quad \frac{T}{T_r} = q_1 q_r; \quad \frac{T_1}{T_r} = q_2 q_r; \quad \dots \quad \frac{T_n}{T_r} = q_{n+1} q_r; \quad \dots \quad \frac{T_{r-1}}{T_r} = q_r$$

ist. Es besteht aber allgemein die Relation  $q_n q_r = q_r q_n$  und daher folgt aus (7)

$$(8) \quad \frac{T}{T_r} = q_r q_1; \quad \frac{T_1}{T_r} = q_r q_2; \quad \dots \quad \frac{T_n}{T_r} = q_r q_{n+1}; \quad \dots \quad \frac{T_{r-1}}{T_r} = q_r.$$







Diese Gleichungen zeigen, dass die Verhältnisse der bei der Entwicklung des Kettenbruchs  $f(q_1 q_r)$  auftretenden Reste zu dem letzten unter ihnen d. i. der Functionen  $-T$ ,  $-T_1$ ,  $-T_2$ , ...  $-T_r$  zu der Constanten  $-T_r$  gleich sind den Zählern der Näherungswerte von  $f(q_r q_1)$ , diese in umgekehrter Folge genommen.

Die Division durch die Constante  $T_r$  beeinflusst die Zahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen in der Zeichenreihe von  $T$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ , ...  $T_r$  nicht, daher der Satz

1) „Die Zähler der Näherungswerte von  $f(q_r q_1)$ :  $q_r q_1$ ;  $q_r q_2$ ; ...  $q_r q_{r-1}$ ;  $q_r$ ;  $1$ , sind der Reihe  $T$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ , ...  $T_r$ , also nach § 1. auch der Reihe  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ , ...  $F_r$  äquivalent, d. h. beide weisen für denselben reellen Wert von  $x$  die gleiche Zahl von Zeichenwechseln auf.“

Die Coefficienten  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  des Quotienten  $q_n$  nehmen um so complicirtere Werte an, je grösser  $n$  wird; es ist deshalb für die praktische Berechnung von Bedeutung, dass der so eben für die Zähler der Näherungswerte von  $f(q_r q_1)$  bewiesene Satz auch für die Zähler der Näherungswerte von  $f(q_1 q_r)$  gültig ist. Man sieht zunächst aus den Gleichungen, welche den Zusammenhang zwischen den Zählern der Näherungswerte von  $f(q_1 q_r)$  ausdrücken,

$$\begin{aligned} q_1 q_1 &= q_1 \\ q_1 q_2 &= q_2 \cdot q_1 q_1 - x^2 \\ q_1 q_3 &= q_3 \cdot q_1 q_2 - x^2 \cdot q_1 q_1 \\ &\dots \dots \dots \\ q_1 q_{n+1} &= q_{n+1} \cdot q_1 q_n - x^2 \cdot q_1 q_{n-1} \\ &\dots \dots \dots \\ q_1 q_r &= q_r \cdot q_1 q_{r-1} - x^2 \cdot q_1 q_{r-2}, \end{aligned}$$

dass die erste und zweite der für Sturm'sche Functionen charakteristischen Eigenschaften auch von der Functionenreihe

$$q_1 q_r; \quad q_2 q_r; \quad \dots \quad q_1 q_2; \quad q_1; \quad 1$$

gelten. Ferner hat die Gleichung  $q_1 q_r = 0$  dieselben Wurzeln wie  $F(x) = 0$ , da beide Functionen  $q_1 q_r$  und  $T(x)$  sich nach Gleichung (7) nur durch den constanten Factor  $T_r$  unterscheiden, und endlich ist in Folge der Relation

$$q_1 q_n \cdot q_2 q_{n-1} - q_2 q_n \cdot q_1 q_{n-1} = -x^{2(n-1)}$$

auch

$$\frac{F}{F_1} = \frac{T}{T_1} = \frac{q_1 q_r}{q_2 q_r} = \frac{q_1 q_{r-1} \cdot q_1 q_r}{q_1 q_{r-1} \cdot q_2 q_r} = \frac{q_1 q_{r-1} \cdot q_1 q_r}{x^{2(r-1)} + q_1 q_r \cdot q_2 q_{r-1}}.$$

Diese Gleichung zeigt aber, dass das Product  $q_1 q_{r-1} \cdot q_1 q_r$  und somit





$$x^{2(n-1)}\{F_n(x) \cdot \varphi_{n-1} - \vartheta_{m-n} \cdot q_1 q_{n-1}\} = F(x)\{\psi_{n-2} \cdot q_1 q_{n-1} - \varphi_{n-1} \cdot q_2 q_{n-1}\}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist teilbar durch  $x^{2(n-1)}$ , die rechte enthält dagegen höchstens den Factor  $x^{2n-3}$ , da  $F(x)$  nach Voraussetzung (§ 1.) nicht durch  $x$  oder eine höhere Potenz von  $x$  teilbar und der Klammerausdruck rechts nur vom Grade  $2n-3$  ist. Es müssen also notwendig beide Seiten der letzten Gleichung  $= 0$  sein, und daraus ergibt sich der in den Gleichungen (12) ausgedrückte Satz, dass die Functionen  $\vartheta$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  sich bez. von  $F_n(x)$ ,  $q_1 q_{n-1}$  und  $q_2 q_{n-1}$  nur durch ein und denselben constanten Factor unterscheiden können.

Der gemeinsame Factor von  $F(x)$  und  $F_1(x)$

$$\left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$

ist, wie die Gleichung (11) zeigt, auch ein Factor von  $\vartheta_{m-n}$ ; wir setzen daher

$$\vartheta_{m-n}(x) = \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \cdot \Theta_{r-n}(x)$$

und haben dann statt (11) die reducirte Gleichung zu lösen

$$(11^*) \quad x^{2(n-1)} \Theta_{r-n}(x) = T_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) - T(x) \cdot \psi_{n-2}(x)$$

Diese ist entsprechend der Gleichung (10\*) nur gültig für  $n=2, 3, \dots, r+1$ , wenn man für  $n=r+1$ ,  $\Theta_{r-n}$  gleich Null setzt; sie verliert ihre Bedeutung für  $n=0$  und  $n=1$ .

Wir nehmen

$$\Theta_r(x) = T(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

und

$$\Theta_{r-1}(x) = T_1(x).$$

Die Partialbruchzerlegung des Quotienten  $\frac{T_1(x)}{T(x)}$  liefert die Formel

$$\frac{T_1(x)}{T(x)} = - \sum \frac{T_1(x_1)}{x_1 T'(x_1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}},$$

in welcher der erste Partialbruch als Bildungstypus für die übrigen hinter das Summenzeichen geschrieben ist. Bezeichnen wir den Quotienten  $\frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)}$  zur Abkürzung mit  $\varepsilon_k$

$$4^*) \quad \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} = \varepsilon_k$$

so wird

$$(13) \quad \Theta_{r-1}(x) = T_1(x) = - \sum_{x_1}^{\varepsilon_1} \cdot \frac{T(x)}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)} \\ = - \sum_{x_1}^{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \left(1 - \frac{x}{x_3}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

Wir setzen ferner nach Analogie mit den Sylvester'schen Functionen<sup>2)</sup>, nur  $x_k$  mit  $\frac{1}{x_k}$ ,  $\varepsilon_k$  mit  $\frac{\varepsilon_k}{x_k}$  vertauschend,

$$\Theta_{r-2}(x) = (-1)^2 \sum_{x_1 x_2}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_3}\right) \left(1 - \frac{x}{x_4}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right).$$

$$\Theta_{r-3}(x) = (-1)^3 \sum_{x_1 x_2 x_3}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \frac{1}{x_3} \right)^3 \left(1 - \frac{x}{x_4}\right) \left(1 - \frac{x}{x_5}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

und allgemein

(14)

$$\Theta_{r-n}(x) = (-1)^n \sum_{x_1 x_2 \dots x_n}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^n \left(1 - \frac{x}{x_{n+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{n+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

Hier ist  $\delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)$  das Product der sämtlichen Differenzen von je zwei der Grössen  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$  und das Summenzeichen bezieht sich auf alle Combinationsformen der  $n$ ten Classe aus den Elementen 1, 2, ...,  $r$ .

Entsprechend der Formel (14) setzen wir

$$(15) \quad \varphi_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \sum_{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}} \times \\ \times \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_{n-1}}\right)$$

besonders auch mit Rücksicht darauf, dass, wie bei den Sylvester'schen Functionen die Coefficienten der höchsten Potenzen von  $x$  in  $\Theta_{r-n}$  und  $\varphi_n$ , so hier die constanten Glieder von  $\Theta_{r-n}$  und  $\varphi_n$  dieselben Werte haben.

Es lässt sich nun zeigen, dass unter Zugrundelegung der Werte (14) und (15) für  $\Theta$  und  $\varphi$  die Differenz  $x^{2(n-1)} \Theta_{r-n}(x) - T_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x)$  durch  $T(x)$  teilbar ist; hierzu genügt aber der Nachweis, dass jene Differenz für irgend einen Wurzelwert von  $F(x) = 0$ , etwa für  $x = x_1$  verschwindet, da sie eine symmetrische Function der Wurzeln  $x_1, \dots, x_r$  darstellt. Man findet

$$\begin{cases} T_1(x_1) = -\frac{\varepsilon_1}{x_1} \left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_1}{x_r}\right) \\ \varphi_{n-1}(x_1) = (-1)^{n-1} \sum \frac{\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n}{x_2 \cdots x_n} \cdot \delta \left( \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n} \right)^2 \left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_1}{x_n}\right) \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} \Theta_{r-n}(x_1) &= (-1)^n \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n} \right)^2 \left(1 - \frac{x_1}{x_{n+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_1}{x_r}\right) \\ &= (-1)^n \frac{\varepsilon_1}{x_1} \frac{\left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_1}{x_r}\right)}{x_1^{2(n-1)}} \sum \frac{\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n}{x_2 \cdots x_n} \times \\ &\quad \times \delta \left( \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n} \right)^2 \left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_1}{x_n}\right), \end{aligned}$$

daher  $x_1^{2(n-1)} \Theta_{r-n}(x_1) = T_1(x_1) \cdot \varphi_{n-1}(x_1)$  w. z. b. w.

Es ist also  $\frac{x_1^{2(n-1)} \cdot \Theta_{r-n}(x) - T_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x)}{T'(x)}$  eine ganze Function und zwar  $(n-2)$ ten Grades; damit ist aber bewiesen, dass die Ausdrücke (14) und (15) die Gleichung (11\*) befriedigen.

Man bemerke, dass, wenn die Wurzeln  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_m$  Wiederholungen der unter einander verschiedenen Wurzeln  $x_1, x_2, \dots, x_r$  sind, und nur unter dieser Voraussetzung, für solche Werte von  $n$ , welche  $> r$  sind, die Ausdrücke für  $\Theta_{m-n}$  und  $\varphi_n$  identisch  $= 0$  werden. Umgekehrt zeigt also das Verschwinden der letzten oder mehrerer der letzten Functionen  $\Theta$  und  $\varphi$  das Vorhandensein gleicher Wurzeln an.

Die Werte (14) und (15) für die Functionen  $\Theta$  und  $\varphi$ , welche wir die Sylvester'schen Functionen zweiter Gattung nennen wollen, kann man noch in eine andere Form setzen, wenn man beachtet, dass

$$\delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n} \right)^2 = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^{2(n-1)}} \delta(x_1 x_2 \cdots x_n)$$

ist. So findet man leicht

$$\begin{aligned} (14^*) \quad \frac{\Theta_{r-n}(x)}{T(x)} &= \frac{\Theta_{m-n}(x)}{F(x)} \\ &= (-1)^n \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n} \right)^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right)} \\ &= \sum \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n \frac{\delta(x_1 x_2 \cdots x_n)^2}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^{2(n-1)}} \cdot \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)} \end{aligned}$$



(15\*)

$$\varphi_{n-1}(x) = \sum \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} \frac{\delta(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^2}{(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{2(n-1)}} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_{n-1}).$$

Es bedarf zur Lösung der Aufgabe,  $F_n(x)$  und  $q_1 q_{n-1}$  selbst durch die Wurzeln der Gleichung  $F(x) = 0$  darzustellen, noch der Bestimmung des constanten Factors  $\lambda_{n-1}$ . Man erhält zunächst, wenn man aus den beiden Gleichungen

$$x^{2(n-1)} \cdot \vartheta_{m-n}(x) = F_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) - F(x) \cdot \psi_{n-2}(x)$$

$$x^{2n} \cdot \vartheta_{m-n-1}(x) = F_1(x) \cdot \varphi_n(x) - F(x) \cdot \psi_{n-1}(x)$$

die Function  $F_1(x)$  eliminirt und auf der rechten Seite des Resultates für  $\varphi$  und  $\psi$  ihre Werte aus (12) substituirt,

$$\begin{aligned} x^{2(n-1)} \{ \vartheta_{m-n}(x) \cdot \varphi_n(x) - x^2 \cdot \vartheta_{m-n-1}(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) \} \\ = F(x) \cdot \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \{ q_1 q_{n-1} \cdot q_2 q_n - q_1 q_n \cdot q_2 q_{n-1} \} \end{aligned}$$

oder nach einer schon im § 2. benutzten Formel aus der Theorie der Kettenbrüche

$$x^{2(n-1)} \{ \vartheta_{m-n}(x) \cdot \varphi_n(x) - x^2 \cdot \vartheta_{m-n-1}(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) \} = F(x) \cdot \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \cdot x^{2(n-1)}$$

Heben wir den Factor  $x^{2(n-1)}$ , und setzen  $x=0$ , so reducirt sich  $F(x)$  auf das constante Glied  $a_0 = 1$ , und wir erhalten

$$\lambda_n \cdot \lambda_{n-1} = \vartheta_{m-n}(0) \cdot \varphi_n(0)$$

oder

$$(16) \quad \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} = \xi_n^2,$$

wenn die Constante

$$\vartheta_{m-n}(0) = \varphi_n(0) = (-1)^n \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \cdot \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2$$

mit  $\xi_n$  bezeichnet wird. Die Recursionsformel (16) gestattet,  $\lambda_n$  durch die Grössen  $\xi_n, \xi_{n-1}, \dots, \xi_1$  und  $\lambda_0$  auszudrücken; nach Gleichung (13)

ist aber  $\xi_1 = -\sum \frac{\varepsilon_1}{x_1}$  und  $\vartheta_{m-1}(x) = F_1(x)$ , also  $\lambda_0 = 1$ , daher

$$\lambda_1 = \xi_1^2 = \left( -\sum \frac{\varepsilon_1}{x_1} \right)^2$$

$$\lambda_2 = \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2}; \quad \lambda_3 = \frac{\xi_1^2 \xi_3^2}{\xi_2^2}$$

und allgemein <sup>2)</sup>

$$\lambda_{2n} = \frac{\xi_2^2 \cdot \xi_4^2 \dots \xi_{2n}^2}{\xi_1^2 \cdot \xi_3^2 \dots \xi_{2n-1}^2}; \quad \lambda_{2n+1} = \frac{\xi_1^2 \cdot \xi_3^2 \cdot \xi_5^2 \dots \xi_{2n+1}^2}{\xi_2^2 \cdot \xi_4^2 \dots \xi_{2n}^2}.$$

20) *Wendlandt: Die Sturm'schen Functionen zweiter Gattung.*

Da die Coefficienten von  $F(x)$  reell sind, so sind auch die Grössen  $\xi$  reell; denn sie sind rationale symmetrische Functionen der Wurzeln  $x_1, x_2, \dots, x_r$  und demnach auch rationale Functionen der Coefficienten von  $F(x)$ .

Es unterscheidet sich also  $\vartheta_{m-n}(x)$  von  $F'(x)$  und  $\varphi_{n-1}(x)$  von  $q_1 q_{n-1}$  nur durch einen von  $x$  unabhängigen, wesentlich positiven Factor  $\lambda_{n-1}$ , so dass wir mit Rücksicht auf den Satz 2) des vorigen Paragraphen den neuen Satz aussprechen können:

„Besitzt  $F_1(x)$  für alle reellen Wurzelwerte von  $F'(x) = 0$  mit  $F'(x)$  gleiches Vorzeichen, so können die Sylvester'schen Functionen zweiter Gattung

$$\vartheta_m(x) = F'(x), \quad \vartheta_{m-1}(x) = F_1'(x), \quad \vartheta_{m-2}(x), \quad \vartheta_{m-3}(x), \quad \dots \quad \vartheta_{m-r}(x)$$

oder

$$1, \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \quad \dots \quad \varphi_r(x)$$

den Sturm'schen Functionen zweiter Gattung substituirt werden.“

In dem besonderen Falle  $F_1(x) = F'(x)$  drückt (Gleichung (4))  $\varepsilon_k$  aus, wie oft  $x_k$  unter den Wurzeln von  $F'(x) = 0$  vorkommt, und man kann dann statt der Formeln (14) und (15) sich der folgenden bedienen

$$\begin{aligned} \vartheta_{m-n}(x) &= (-1)^n \sum_{x_1 x_2 \dots x_n} \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \left( 1 - \frac{x}{x_{n+1}} \right) \left( 1 - \frac{x}{x_{n+2}} \right) \dots \left( 1 - \frac{x}{x_m} \right) \\ (18) \quad \varphi_{n-1}(x) &= (-1)^{n-1} \sum_{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \right)^2 \left( 1 - \frac{x}{x_1} \right) \times \\ &\quad \times \left( 1 - \frac{x}{x_2} \right) \dots \left( 1 - \frac{x}{x_{n-1}} \right), \end{aligned}$$

wenn man nur die Summe auf alle Combinationsformen  $n$ ter, bez.  $(n-1)$ ter Classe aus den  $m$  Elementen  $x_1, x_2, \dots, x_m$  erweitert. Denn diese neuen Ausdrücke stimmen mit (14) und (15) unmittelbar für den Fall überein, dass sämtliche Wurzeln der Gleichung  $F'(x) = 0$  verschieden sind; enthält aber die Gleichung  $F'(x) = 0$  mehrfache Wurzeln, so verschwinden in den obigen Summen so viele Glieder, dass man auf die früheren Formeln (14) und (15) zurückgelangt.

Der Coefficient der höchsten Potenz in  $\vartheta_{m-n}$  ist

$$(-1)^n \sum_{x_1 x_2 \dots x_n} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2$$

der in  $\varphi_n(x)$  ist

$$\sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{(x_1 x_2 \dots x_n)^2} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2$$

Es giebt also die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$(19) \quad 1; \quad \Sigma \varepsilon_1; \quad \Sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \right)^2; \quad \dots \quad \Sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2$$

wie in der Reihe

$$(20) \quad 1; \quad \Sigma \frac{\varepsilon_1}{x_1^2}; \quad \Sigma \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{x_1^2 x_2^2} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \right)^2; \quad \dots \quad \Sigma \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r}{x_1^2 x_2^2 \dots x_r^2} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2$$

nach § 1. die Zahl der verschiedenen complexen Wurzelpaare von  $F(x) = 0$  an<sup>2</sup>); beiläufig kann man hieraus die Folgerung ziehen, dass die Grössen (19) und (20) äquivalente Zeichenreihen bilden.

### Litteratur.

1) siehe Sturm § 2., 2)

2) Sylvester: „Memoir on Rational Derivation from Equations of Coexistence“ (Philosophical Magazine December 1839, pag. 438.) drückt zuerst die Sturm'sche Function  $F_n(x)$  und  $q_1 q_{n-1}$  durch die Wurzeln von  $F(x) = 0$  aus. — In seiner „Theory of the Syzygetic relations“ (siehe § 1. 3)) behandelt Sylvester den allgemeinen Fall, dass der erste Divisor eine ganze Function beliebigen Grades ist (Section II); er specialisirt die allgemeinen Formeln in Section III, besonders im art. 35 und 36.

3) Hattendorf stellte, wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, die Formeln für den Fall auf, dass  $F(x) = 0$  auch mehrfache Wurzeln enthalte.

### § 4.

Im letzten Paragraphen sind die Ausdrücke für die Functionen  $\vartheta$  und  $\varphi$  nach Analogie mit den Sylvester'schen Functionen aufgestellt, und es ist nachträglich gezeigt, dass sie der Functionalgleichung (11\*)

$$x^{2(n-1)} \cdot \Theta_{r-n}(x) = T_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) - T(x) \cdot \psi_{n-2}(x)$$

genügen. Man kann aber auch direct von dieser Gleichung aus die Werte von  $\vartheta$  und  $\psi$  ermitteln.

Aus (11\*) folgt nämlich, dass für  $x = x_1, x_2 \dots x_r$

$$x^{2(n-1)} \Theta_{r-n}(x) = T_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x),$$

mithin

$$\frac{\Theta_{r-n}(x)}{\varphi_{n-1}(x)} = \frac{T_1(x)}{x^{2(n-1)}}$$

Es sind uns also von der gebrochenen Function  $u = \frac{\Theta_{r-n}(x)}{\varphi_{n-1}(x)}$   $r$  besondere Werte bekannt

$$(21) \quad u_1 = \frac{T_1(x_1)}{x_1^{2(n-1)}}; \quad u_2 = \frac{T_2(x_2)}{x_2^{2(n-1)}}; \quad \dots \quad u_r = \frac{T_r(x_r)}{x_r^{2(n-1)}}.$$

und diese bestimmen sie vollständig; denn ihr Zähler ist vom Grade  $r-n$ , ihr Nenner vom Grade  $n-1$ , somit überhaupt  $r+1$  Constante unbestimmt, von denen eine der Einheit gleich gesetzt werden darf.

Die Function  $u$  ist nun gegeben durch die von Cauchy<sup>1)</sup> aufgestellte Interpolationsformel, welche für den Fall, dass der Zähler eine ganze Function  $(r-n)$ ten, der Nenner eine ganze Function  $(n-1)$ ten Grades ist, folgende Form annimmt:

$$(22) \quad u = \frac{\sum u_1 u_2 \dots u_n \cdot \frac{(x-x_{n+1})(x-x_{n+2}) \dots (x-x_r)}{(x_1-x_{n+1}) \dots (x_1-x_r) \dots (x_n-x_{n+1}) \dots (x_n-x_r)}}{\sum u_1 u_2 \dots u_{n-1} \cdot \frac{(x_1-x)(x_2-x) \dots (x_{n-1}-x)}{(x_1-x_n) \dots (x_1-x_r) \dots (x_{n-1}-x_n) \dots (x_{n-1}-x_r)}}$$

Hier ist (Gleichung 13))

$$(21^*) \quad u_1 = \frac{T_1(x_1)}{x_1^{2(n-1)}} = -\frac{\varepsilon_1}{x_1} \frac{1}{x_1^{2(n-1)}} \left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right) \left(1 - \frac{x_1}{x_3}\right) \dots \left(1 - \frac{x_1}{x_r}\right) \\ = \frac{(-1)^r}{x_1 x_2 \dots x_r} \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3) \dots (x_1-x_r)}{x_1^{2(n-1)}},$$

also

$$\frac{u_1 u_2 \dots u_n \cdot (x-x_{n+1}) \dots (x-x_r)}{(x_1-x_{n+1}) \dots (x_1-x_r) \dots (x_n-x_{n+1}) \dots (x_n-x_r)} = \frac{(-1)^{nr}}{(x_1 x_2 \dots x_r)^n} \cdot \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \times \\ \{ \frac{(x_1-x_2) \dots (x_1-x_n) \dots (x_{n-1}-x_1) \dots (x_{n-1}-x_n) (x-x_{n+1}) \dots (x-x_r)}{(x_1 x_2 \dots x_n)^{2(n-1)}} \} \\ = \frac{(-1)^{nr}}{(x_1 x_2 \dots x_r)^{n-1}} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \times \\ \times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \cdot (-1)^{r-n} \left(1 - \frac{x}{x_{n+1}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

und dem entsprechend

$$\frac{u_1 u_2 \dots u_{n-1} \cdot (x_1-x)(x_2-x) \dots (x_{n-1}-x)}{(x_1-x_n) \dots (x_1-x_r) \dots (x_{n-1}-x_n) \dots (x_{n-1}-x_r)} \\ = \frac{(-1)^{(n-1)r}}{(x_1 x_2 \dots x_r)^{n-1}} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \right)^2 \times \\ \times \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_{n-1}}\right)$$

Wir sehen von dem Zähler und Nenner gemeinsamen Factor

$\frac{(-1)^{(n-1)r} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}{(x_1 x_2 \dots x_r)^{n-1}}$  ab; dann behält der Zähler den Factor  $(-1)^r \cdot (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{r-n} = -1$  und wir finden schliesslich

$$\vartheta = \frac{\Theta_{r-n}(x)}{\varphi_{n-1}(x)} = - \frac{\sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{x}{x_{n+1}} \right) \dots \left( 1 - \frac{x}{x_r} \right)}{\sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{x}{x_1} \right) \dots \left( 1 - \frac{x}{x_{n-1}} \right)}$$

Da aber für  $n=0$   $\Theta_{r-n}(x) = T(x)$  ist, so müssen wir setzen

$$(10) \quad \Theta_{r-n}(x) = (-1)^n \cdot \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \cdot \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \times \\ \times \left( 1 - \frac{x}{x_{n+1}} \right) \dots \left( 1 - \frac{x}{x_r} \right)$$

und daher

$$\varphi_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \cdot \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \right)^2 \\ \times \left( 1 - \frac{x}{x_1} \right) \dots \left( 1 - \frac{x}{x_{n-1}} \right);$$

dies sind die in (14) und (15) für  $\vartheta$  und  $\varphi$  aufgestellten Ausdrücke.

Es wird sich später bei einem anderen directen Verfahren zur Ermittlung der Functionen  $\vartheta$  und  $\varphi$  zeigen, dass man zuerst den Wert von  $\varphi$  findet. Setzen wir aber die Function  $\varphi$  als bekannt voraus, so kann man  $\vartheta$  durch folgendes Verfahren<sup>2)</sup> bestimmen, welches nur aus dem Grunde schon hier seinen Platz findet, weil es für die Function  $\vartheta$ , gleich den vorhergehenden Methoden, ihren Ausdruck durch die Wurzeln  $x_1, x_2, \dots, x_r$  giebt. Man kennt nach der Lagrange'schen Interpolationsmethode die Function  $\Theta_{r-n}(x)$ , deren Grad  $r-n$  ist, wenn ihr Wert für  $r-n+1$  Werte des  $x$ , etwa für  $x = x_n, x = x_{n+1}, \dots, x = x_r$  gegeben ist. Nach (11\*) ist für jede Wurzel  $x_k$  der Gleichung  $T(x) = 0$

$$x_k^{2(n-1)} \cdot \Theta_{r-n}(x_k) = T_1(x_k) \cdot \varphi_{n-1}(x_k);$$

es ist aber nach (13)

$$T_1(x_n) = - \frac{\varepsilon_n}{x_n} \left( 1 - \frac{x_n}{x_1} \right) \left( 1 - \frac{x_n}{x_2} \right) \dots \left( 1 - \frac{x_n}{x_{n-1}} \right) \cdot \left( 1 - \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) \dots \left( 1 - \frac{x_n}{x_r} \right)$$

! nach (15)

$$\varphi_{n-1}(x_n) = (-1)^{n-1} \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \right)^2 \left( 1 - \frac{x_n}{x_1} \right) \left( 1 - \frac{x_n}{x_2} \right) \dots \left( 1 - \frac{x_n}{x_{n-1}} \right)$$

also

$$\Theta_{r-n}(x_n) = (-1)^n \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \left( 1 - \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) \dots \left( 1 - \frac{x_n}{x_r} \right)$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Ausdruck

$$(-1)^n \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \left( 1 - \frac{x}{x_{n+1}} \right) \left( 1 - \frac{x}{x_{n+2}} \right) \dots \left( 1 - \frac{x}{x_r} \right)$$

für die  $r-n+1$  Werte von  $x: x = x_n, = x_{n+1}, = x_{n+2}, \dots x = x_r$  mit  $\Theta_{r-n}(x)$  übereinstimmt, und da er eine ganze Function vom Grade  $r-n$  ist, so ist er also auch der Wert von  $\Theta_{r-n}(x)$ .

#### Litteratur:

1) Cauchy: „Analyse algèbr.“ pag. 528. — Liouville hat zuerst auf die Benutzung der Cauchy'schen Formel zur Bestimmung von  $\vartheta$  und  $\varphi$  aufmerksam gemacht (siehe die in § 2. 2) erwähnte Abhandlung von Sturm pag. 361).

2) Ich verdanke diese Methode einer Mitteilung des Herrn Prof. Stern; man hat dieselbe bei der Sylvester'schen Function  $\vartheta$  noch nicht in Anwendung gebracht; dies kann aber in ganz ähnlicher Weise, wie hier, geschehen.

#### § 5.

Es ist unsere weitere Aufgabe, die Functionen  $\vartheta$  und  $\varphi$  zu ermitteln, wenn nur  $F_1(x)$  und die Gleichung  $F(x) = 0$  gegeben ist, deren Wurzeln uns unbekannt sind. — Man löst diese Aufgabe am einfachsten, indem man in das System von Gleichungen (3) für  $F_n(x)$  seinen Wert aus (12)  $\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{\lambda_{n-1}}$  substituirt; dann geht die Gleichung

$$F_{n-1}(x) = q_n \cdot F_n(x) - x^2 \cdot F_{n+1}(x)$$

über in die andere

$$\frac{\vartheta_{m-n+1}}{\lambda_{n-2}} = q_n \cdot \frac{\vartheta_{m-n}}{\lambda_{n-1}} - x^2 \cdot \frac{\vartheta_{m-n-1}}{\lambda_n}$$

oder durch Multiplication mit  $\lambda_{n-2} \cdot \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n$  in

$$\lambda_{n-1} \cdot \lambda_n \cdot \vartheta_{m-n+1} = \lambda_{n-2} \cdot \lambda_n \cdot q_n \cdot \vartheta_{m-n} - x^2 \cdot \lambda_{n-2} \cdot \lambda_{n-1} \cdot \vartheta_{m-n-1}$$

**Setzen wir**  $q_n \cdot \lambda_n \cdot \lambda_{n-2} = Q_n$ , speciell  $q_1 \cdot \lambda_1 = Q_1$ ,  $q_2 \cdot \lambda_2 = Q_2$ , und **beachten, dass nach (17) allgemein**  $\lambda_{n-1} \cdot \lambda_n = \xi_n^2$  **ist, so wird**

$$\xi_n^2 \cdot \vartheta_{m-n+1} = Q_n \cdot \vartheta_{m-n} - x^2 \cdot \xi_{n-1}^2 \cdot \vartheta_{m-n-1}$$

**und daher der Algorithmus für die  $\vartheta$  dieser:**

$$\xi_1^2 \cdot \vartheta_m(x) = Q_1 \cdot \vartheta_{m-1}(x) - x^2 \cdot \xi_0^2 \cdot \vartheta_{m-2}(x)$$

$$\xi_2^2 \cdot \vartheta_{m-1}(x) = Q_3 \cdot \vartheta_{m-2}(x) - x^2 \cdot \xi_1^2 \cdot \vartheta_{m-3}(x)$$

$$(23) \quad \begin{matrix} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_n^2 \cdot \vartheta_{m-n+1}(x) = & q_n \cdot \vartheta_{m-n}(x) - x^2 \cdot \xi_{n-1}^2 \cdot \vartheta_{m-n-1}(x) \end{matrix}$$

$$\xi_{r-1}^2 \cdot \vartheta_{m-r+2}(x) = Q_{r-1} \cdot \vartheta_{m-r+1}(x) - x^2 \cdot \xi_{r-2}^2 \cdot \vartheta_{m-r}(x)$$

$$\xi_r^2 \cdot \vartheta_{m-r+1}(x) = Q_r \cdot \vartheta_{m-r}(x)$$

Um also aus zwei auf einander folgenden Functionen  $\vartheta_{m-n+1}$  und  $\vartheta_{m-n}$  die nächste  $\vartheta_{m-n-1}$  zu bilden, multiplicire man  $\vartheta_{m-n+1}$  mit  $\xi_n^2$  d. i. mit dem Quadrat des constanten Gliedes von  $\vartheta_{m-n}$  und dividire dieses Product, welches man nach wachsenden Potenzen von  $x$  ordnet, durch die ebenso geordnete Function  $\vartheta_{m-n}$ . Der Quotient ist eine lineare Function von  $x$  und der Rest giebt, durch  $-x^2 \xi_{n-1}^2$  dividirt, die ganze Function  $(m-n-1)$ ten Grades  $\vartheta_{m-n-1}(x)$ . Diese Regel gilt von  $n = 1$  an.

Die Recursionsformeln für die  $\varphi$  ergeben sich genau in derselben Weise, wenn man von der Relation

$$q_1 q_n = q_n \cdot q_1 q_{n-1} - x^2 \cdot q_1 q_{n-2}$$

ausgeht. Substituiert man in in dieser  $q_1 q_n = \frac{\tau_n(x)}{\lambda_n}$ , multiplicirt wieder beiderseits mit  $\lambda_{n-2} \cdot \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n$ , so wird

$$\xi_{n-1}^2 \cdot \varphi_n = Q_n \cdot \varphi_{n-1} - x^2 \cdot \xi_n^2 \cdot \varphi_{n-2}$$

**also**

$$\varphi_0(x) = 1,$$

$$\xi_0^2 \cdot \varphi_1(x) = Q_1 \cdot \varphi_0(x)$$

$$\xi_1^2 \cdot \varphi_9(x) = Q_9 \cdot \varphi_1(x) - x^2 \cdot \xi_2^2 \cdot \varphi_0(x)$$

$$(24) \quad \begin{array}{c} . . . . . \\ \xi_{n-1}^2 \cdot \varphi_n(x) = Q_n \cdot \varphi_{n-1}(x) - x^2 \cdot \xi_n^2 \cdot \varphi_{n-2}(x) \end{array}$$

$$\xi_{r-1}^2 \cdot \varphi_r(x) = Q_r \cdot \varphi_{r-1}(x) - x^2 \cdot \xi_r^2 \cdot \varphi_{r-2}(x)$$

**Ersetzt man endlich in der Gleichung**

$$q_1 q_n = q_n \cdot q_2 q_{n-1} - x^2 \cdot q_2 q_{n-2}$$

$q_2 q_n$  durch  $\frac{\psi_{n-2}(x)}{\lambda_{n-1}}$ , so erhält man, wie oben

$$\xi_{n-1}^2 \cdot \psi_{n-1}(x) = Q_n \cdot \psi_{n-2}(x) - x^2 \cdot \xi_n^2 \cdot \psi_{n-3}(x).$$

**Der Wert von  $\psi_0(x)$  ergibt sich aus dem Vergleich der beiden Gleichungen**

$$x^2. \vartheta_{m-2}(x) = \varphi_1(x).F_1(x) - \psi_0(x).F(x) \quad (\text{nach (11)})$$

$$x^2 \cdot \vartheta_{m-2}(x) = Q_1 \cdot \vartheta_{m-1}(x) - \xi_1^2 \cdot \vartheta_m(x) \quad (\text{nach (23)})$$

nämlich  $\psi_0(x) = \xi_1^2$  und daher ist die vollständige Reihe von Gleichungen für die Functionen  $\psi$

[illegible]

## Litteratur:

Die Recursionsformeln für die Sylvester'schen Functionen giebt Sturm im Schlussparagraphen seiner Arbeit (s. sub § 2. 2).

**§ 6.**

Die im Eingange des vorigen Paragraphen gestellte Aufgabe, die Functionen  $\vartheta$  und  $\varphi$  zu bestimmen, wenn nur  $F(x)$  und  $F_1(x)$  als bekannt vorausgesetzt werden, lässt sich auch dadurch lösen, dass die  $\vartheta$  und  $\varphi$  durch die reciproken Potenzsummen der Wurzeln, also mittelbar durch die Coefficienten von  $F(x)$  und  $F_1(x)$  allein ausgedrückt werden.

Wir müssen zu diesem Zwecke auf die Gleichung (14) zurückgreifen, aus der folgt

$$\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} = (-1)^n \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right)}.$$

**Es ist aber (vergl. Baltzer, Determinanten. § 10. 1)**



$$\delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n} \\ \frac{1}{x_1^2} & \frac{1}{x_2^2} & \dots & \frac{1}{x_n^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

und ferner

$$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \frac{\delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)}{\left( 1 - \frac{x}{x_1} \right) \left( 1 - \frac{x}{x_2} \right) \dots \left( 1 - \frac{x}{x_n} \right)} = \sum \frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} \frac{\varepsilon_1}{x_1^n} \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n}{x_2 x_3 \dots x_n} \delta \left( \frac{1}{x_2} \frac{1}{x_3} \dots \frac{1}{x_n} \right)$$

$$\text{d. i.} = \begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_1}{x_1} & \frac{\varepsilon_2}{x_2} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n} \\ \frac{\varepsilon_1}{x_1^2} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^2} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon_1}{x_1^{n-1}} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^{n-1}} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^{n-1}} \\ \frac{\varepsilon_1}{x_1^n \left( 1 - \frac{x}{x_1} \right)} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^n \left( 1 - \frac{x}{x_2} \right)} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^n \left( 1 - \frac{x}{x_n} \right)} \end{vmatrix}$$

mithin nach dem Multiplicationstheorem

$$\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} =$$

$$(-1)^n \cdot \sum \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_2 & X_3 & & X_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1} & X_n & \dots & X_{2n-2} \\ \sum_{1,n}^i \frac{\varepsilon_i}{x_i^n \left( 1 - \frac{x}{x_i} \right)} & \sum_{1,n}^i \frac{\varepsilon_i}{x_i^{n+1} \left( 1 - \frac{x}{x_i} \right)} & \dots & \sum_{1,n}^i \frac{\varepsilon_i}{x_i^{2n-1} \left( 1 - \frac{x}{x_i} \right)} \end{vmatrix}$$

$$X_k = \frac{\varepsilon_1}{x_1^k} + \frac{\varepsilon_2}{x_2^k} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{x_n^k}$$

Diese letzte Determinante zerfällt in  $n^n$  Determinanten, die sämtlich identisch  $= 0$  sind mit Ausnahme der  $1.2 \dots n$  Determinanten, welche man aus der folgenden durch Permutation der Indices  $1, 2, 3, \dots n$  ableitet:

$$\begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_1}{x_1} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^2} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^n} \\ \frac{\varepsilon_1}{x_1^2} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^3} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^{n+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon_1}{x_1^{n-1}} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^n} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^{2n-2}} \\ \frac{\varepsilon_1}{x_1^n \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^{n+1} \left(1 - \frac{x}{x_2}\right)} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^{2n-1} \left(1 - \frac{x}{x_n}\right)} \end{vmatrix}$$

Man findet also  $(-1)^n \cdot \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F'(x)}$  als die Summe der  $r(r-1) \dots (r-n+1)$  Determinanten, welche sich aus der vorstehenden Determinante ergeben, wenn man darin statt der Indices  $1, 2, \dots n$  alle Variationen\*) der  $n$ ten Classe aus den Elementen  $1, 2, \dots r$  setzt. Dieselbe Summe wird durch die folgende Determinante zusammengefasst, welche wir also  $= (-1)^n \cdot \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F'(x)}$  setzen dürfen.

$$(26) \quad \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F'(x)} = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$S_k = \frac{\varepsilon_1}{x_1^k} + \frac{\varepsilon_2}{x_2^k} + \dots + \frac{\varepsilon_r}{x_r^k}$$

$$U_k = \frac{\varepsilon_1}{x_1^k \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)} + \frac{\varepsilon_2}{x_2^k \left(1 - \frac{x}{x_2}\right)} + \dots + \frac{\varepsilon_r}{x_r^k \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)}$$

Es ist zu der Formel

---

\*) Die Variationsformen begreifen alle die Formen, welche aus den Combinationsformen durch Permutation der Indices erhalten werden.

$$(26) \quad \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F'(x)} = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_i & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{i+1} & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{i+n-2} & \dots & S_{2n-2} \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{i+n-1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

die Bemerkung nicht überflüssig, dass man die in ihr auftretende Determinante noch weiter transformiren kann. Denn aus der identischen Gleichung

$$U_i = x \cdot U_{i+1} + S_i$$

folgt

$$U_i = x^{n-1} \cdot U_{i+n-1} + x^{n-2} \cdot S_{i+n-2} + x^{n-3} \cdot S_{i+n-3} + \dots + S_{i+1} + S_i;$$

multiplicirt man daher die erste Horizontalreihe mit  $x^0$ , die zweite mit  $x^1$ , u. s. f., die  $(n-1)$ te mit  $x^{n-2}$  und addirt diese Producte sämmtlich zur letzten Horizontalreihe, nachdem man diese zuvor mit  $x^{n-1}$  multiplicirt hat, so findet sich

$$(26^*) \quad \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F'(x)} = \frac{(-1)^n}{x^{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_i & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{i+1} & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{i+n-2} & \dots & S_{2n-2} \\ U_1 & U_2 & \dots & U_i & \dots & U_n \end{vmatrix}$$

In dieser Form hat wenigstens die Determinante mehr Symmetrie mit derjenigen, welche bei den Sturm'schen Functionen  $\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F'(x)}$  darstellt.

Um  $\vartheta_{m-n}(x)$  durch eine Determinante darzustellen, die sofort erkennen lässt, dass  $\vartheta_{m-n}$  nur eine Function  $(m-n)$ ten Grades ist, multipliciren wir in (26) auf beiden Seiten mit  $F(x)$  und setzen

$$\sum_{k=1}^k \frac{\varepsilon_k \cdot F(x)}{x_k^{n+r} \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)} = V_{n+r};$$

dann wird

$$27) \quad \vartheta_{m-n}(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{n+r-1} & \dots & S_{2n-2} \\ V_n & V_{n+1} & \dots & V_{n+r} & \dots & V_{2n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n \sum_{0, n-1}^r h_{n+r} V_{n+r}$$

$$h_{n+r} = (-1)^{n+r-1} \begin{vmatrix} S_1 & \dots & S_r & S_{r+2} & \dots & S_n \\ S_2 & \dots & S_{r+1} & S_{r+3} & \dots & S_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & \dots & S_{n+r-2} & S_{n+r} & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix}$$

die  $(n-2)$ te mit  $a_{\lambda+2}, \dots$ , die erste mit  $a_{\lambda+n-1}$  und addirt die Summe aller zur letzten, so wird das allgemeine Glied derselben

$$= \sum_{0, m-n}^{\lambda} x^{\lambda} \{a_{\lambda+n} S_r + a_{\lambda+n+1} S_{r-1} + \dots + a_{\lambda+n+r-1} S_1 + b_{\lambda+n+r-1}\}$$

Wir bezeichnen dieses mit  $Q'_{n+r}$ ; dann ist nach (29)

$$(34) \quad \vartheta_{m-n}(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{n+r-1} & \dots & S_{2n-2} \\ Q'_n & Q'_{n+1} & \dots & Q'_{n+r} & \dots & Q'_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$Q'_n = - \sum_{0, m-n}^{\lambda} x^{\lambda} \cdot b_{\lambda+n+r}$$

$$Q'_{n+1} = - \sum_{0, m-n}^{\lambda} x^{\lambda} (a_{\lambda+n} S_1 + b_{\lambda+n})$$

Setzt man, um auf die Functionen  $\vartheta$  den Sturm'schen Satz anwenden zu können,  $F_1(x) = F'(x)$ , so wird  $b_k = (k+1)a_{k+1}$ ;  $S_i$  stellt dann wirklich nur die Summe der reciproken  $i$ ten Potenzen aller Wurzeln von  $F(x) = 0$  dar, und die Gleichung (33) vereinfacht sich, wenn man noch  $r+1$  mit  $r$  vertauscht, zu der Formel

$$S_r + a_1 S_{r-1} + a_2 S_{r-2} + \dots + a_{r-1} S_1 + r \cdot a_r = 0,$$

welche durchaus der Newton'schen Recursionsformel für die Summen der ganzen Potenzen aller Wurzeln analog ist.

### Litteratur:

1) Cayley „Note sur les fonctions de Sturm“ (Liouville. T. 11. pag. 297.) entwickelte zuerst die Formeln 27—30 unter den besonderen Voraussetzungen, dass  $F_1(x) = F'(x)$  und alle Wurzeln von  $F(x)$  ungleich sind. Vergl. Hattendorf. § 7.

2) Andere Ableitungen der Gleichung (33) gaben Hattendorf (§ 7.) und Brioschi: „Intorno ad alcune questione d'algebra“ (Tortolini: Annali di Scienze matematiche e fisiche. T. 5. pag. 301.)

### § 7.

Um auch  $\varphi_{n-1}(x)$  durch eine Determinante darzustellen, entnehmen wir aus (15) den Wert

$$\varphi_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} x^{n-1} \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \right)^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x_1} \right) \dots \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x_{n-1}} \right)$$

Wir ersetzen das Product

$$\delta\left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}}\right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1}\right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_{n-1}}\right) = \delta\left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}} \frac{1}{x}\right)$$

durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_1^2} & \dots & \frac{1}{x_1^{n-1}} \\ 1 & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_2^2} & \dots & \frac{1}{x_2^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \frac{1}{x_{n-1}} & \frac{1}{x_{n-1}^2} & \dots & \frac{1}{x_{n-1}^{n-1}} \\ 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} & \dots & \frac{1}{x^{n-1}} \end{vmatrix}$$

Diese ist zu multipliciren mit  $\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \delta\left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}}\right)$  oder mit

$$\begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_1}{x_1} & \frac{\varepsilon_1}{x_1^2} & \dots & \frac{\varepsilon_1}{x_1^{n-1}} & 0 \\ \frac{\varepsilon_2}{x_2} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^2} & \dots & \frac{\varepsilon_2}{x_2^{n-1}} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon_{n-1}}{x_{n-1}} & \frac{\varepsilon_{n-1}}{x_{n-1}^2} & \dots & \frac{\varepsilon_{n-1}}{x_{n-1}^{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Das Resultat ist, wenn man

$$\frac{\varepsilon_1}{x_1^i} + \frac{\varepsilon_2}{x_2^i} + \dots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{x_{n-1}^i} = X_i$$

setzt,

$$\varphi_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \Sigma \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_2 & X_3 & \dots & X_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1} & X_n & \dots & X_{2n-2} \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

wie eine Betrachtung zeigt, ähnlich der, welche zur Aufstellung  
Lehung (26) führte<sup>1)</sup>,

$$(35) \quad \varphi_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_i = \frac{\varepsilon_1}{x_1^i} + \frac{\varepsilon_2}{x_2^i} + \dots + \frac{\varepsilon_r}{x_r^i}$$

Führt man diesen Wert für  $\varphi_{n-1}(x)$  und den für  $\vartheta_{m-n}(x)$  aus (26) in die Functionalgleichung (11) ein, so wird man finden

$$(36) \quad \psi_{n-2}(x) = (-1)^n x^{n-1} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{r+n-1} & \dots & S_{2n-2} \\ 0 & P_1 & \dots & P_r & \dots & P_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$P_r = \frac{S_1}{x^r} + \frac{S_2}{x^{r-1}} + \dots + \frac{S_r}{x}$$

Bequemer <sup>2)</sup> gelangt man zu diesem Ausdruck für  $\psi_{n-2}(x)$ , wenn man in (32)

$$\frac{S_1}{x^i} + \frac{S_2}{x^{i-1}} + \dots + \frac{S_i}{x} = P_i$$

also

$$U_{i+1} = - \frac{F_1(x)}{F(x)} \cdot \frac{1}{x^i} - P_i$$

setzt und diesen Ausdruck für  $U$  in (26) substituirt; dadurch zerfällt die Determinante auf der rechten Seite jener Gleichung in zwei Theile, und man erhält

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} &= (-1)^{n-1} \frac{F_1(x)}{F(x)} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ x^{n-1} & x^n & \dots & x^{2n-2} \end{vmatrix} \\ &\quad - (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{r+n-1} & \dots & S_{2n-2} \\ P_{n-1} & P_n & \dots & P_{r+n-1} & \dots & P_{2n-2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf (35)

$$x^{2n-1} \cdot \vartheta_{m-n}(x) = F_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) - F(x) \cdot (-1)^n \cdot x^{2n-2} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{r+n-1} & \dots & S_{2n-2} \\ P_{n-1} & P_n & \dots & P_{r+n-1} & \dots & P_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (11), so ergibt sich zur Bestimmung von  $\psi_{n-2}(x)$  die Formel

$$\psi_{n-2}(x) = (-1)^n \cdot x^{n-1} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{r+n-1} & \dots & S_{2n-2} \\ x^{n-1}P_{n-1} & x^{n-1}P_n & \dots & x^{n-1}P_{r+n-1} & \dots & x^{n-1}P_{2n-2} \end{vmatrix}$$

welche sich zu der in (36) aufgestellten vereinfacht, wenn man in der Determinante auf der rechten Seite die erste Horizontalreihe mit 1, die zweite mit  $x$ , ..., die vorletzte mit  $x^{n-2}$  multiplicirt und die Summe aller von der letzten subtrahirt.

Endlich ist die Constante  $\xi_n$  in  $\vartheta_{m-n}(x)$  oder  $\varphi_n(x)$  nach (35)

$$\xi_n = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-1} \end{vmatrix}$$

und der höchste Coefficient  $C_{m-n}^{(m-n)}$  in  $\vartheta_{m-n}(x)$  ist nach (31) (oder einfacher direct nach (19)), abgeschen von dem constanten, den höchsten Coefficienten aller Functionen  $\vartheta$  gemeinsamen Factor

$$a_m = \frac{(-1)^m}{x_1 x_2 \dots x_m}$$

$$C_{m-n}^{(m-n)} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix}$$

der höchste Coefficient von  $\varphi_n(x)$  hat dagegen nach (35) (oder direct nach (20)) den Wert

$$\begin{vmatrix} S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ S_3 & S_4 & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{2n} \end{vmatrix}$$

Man folgert hieraus (§ 1.):

„Die Gleichung  $F(x) = 0$  hat nicht mehr verschiedene reelle positive Wurzeln, als Zeichenwechsel und nicht mehr verschiedene reelle negative Wurzeln, als Zeichenfolgen in der Determinantenreihe

$$(37) \quad 1, \quad -S_1, \quad + \begin{vmatrix} S_1 & S_2 \\ S_1 & S_3 \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \\ S_3 & S_4 & S_5 \end{vmatrix}, \quad \dots \quad (-1)^r \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_r \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_r & S_{r+1} & \dots & S_{2r+1} \end{vmatrix}$$

auftreten; die Gleichung  $F(x) = 0$  hat so viele verschiedene Paare conjugirter Wurzeln, als die Determinantenreihe

$$(38) \quad 1, \quad S_0, \quad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \quad \dots \quad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{r-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{r-1} & S_r & \dots & S_{2r-2} \end{vmatrix}$$

oder

$$(39) \quad 1, \quad S_2, \quad \begin{vmatrix} S_2 & S_3 \\ S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} S_2 & S_3 & S_4 \\ S_3 & S_4 & S_5 \\ S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}, \quad \dots \quad \begin{vmatrix} S_2 & S_3 & \dots & S_{r+1} \\ S_3 & S_4 & \dots & S_{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{r+1} & S_{r+2} & \dots & S_{2r} \end{vmatrix}$$

Zeichenwechsel enthält<sup>3)</sup>. Die Zeichenreihen von (38) und (39) sind also äquivalent.“

Diese Sätze gelten nur dann, wenn auf die Functionen  $\theta$  und  $\varphi$  der Satz von Sturm Anwendung findet, also insbesondere in dem Falle, wo  $F_1(x) = F'(x)$  und die  $S$  die reciproken Potenzsummen aller Wurzeln darstellen.

#### Litteratur:

1) vergl. Joachimsthal: „Bemerkungen über den Sturm'schen Satz“ (Crelle. Bd. 48. pag. 386. im § 5. und 6.)

2) vergl. Brioschi in seinem § 6. 2) erwähnten Aufsätze pag. 306.

3) vergl. Borchardt: „Développements sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes“ (Liouville. Journal T. 12. pag. 59. oder Crelle. Bd. 30. pag. 41.). Die Reihe (38) geht sofort aus der Reihe Borchardt's hervor, wenn man allgemein  $x_k$  mit  $\frac{1}{x_k}$ , also  $s_i = \sum_{1,r}^k \varepsilon_k x_k^i$  mit  $S_i = \sum_{1,r}^k \frac{\varepsilon_k}{x_k^i}$  vertauscht.

#### § 8.

Es ist für die weiteren Untersuchungen von Bedeutung und auch an und für sich nicht ohne Interesse, dass man die Functionen  $\theta$



und  $\varphi$  durch ortho-symmetrische\*) Determinanten, bei denen allgemein das Element  $a_{i,k} = a_{i',k'}$  ist, darstellen kann ( $i+k = i'+k'$ ).

Man erhält diese Ausdrücke am einfachsten aus der allgemeinen Formel<sup>1)</sup>

$$(40) \quad \Sigma f(x_1) \cdot f(x_2) \dots f(x_n) \cdot \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2 = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_{n-1} \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n-1} & t_n & \dots & t_{2n-2} \end{vmatrix}$$

$$t_i = \sum_{1,r}^k \frac{f(x_k)}{x_k^i}$$

die man mit den Mitteln ableiten kann, welche bei Herleitung der Gleichung (26) zur Anwendung kamen. Es bezeichnet in (40)  $f(x)$  eine beliebige Function von  $x$ , und durch das Summenzeichen wird angedeutet, dass man für 1, 2, ...  $n$  der Reihe nach alle Combinationen der  $n$ ten Classe aus den Zahlen 1, 2, ...  $r$  setzen und die entstehenden Ausdrücke summiren soll.

Aus der Gleichung (40) folgt (nach 14), wenn  $f(x_k) = \frac{\varepsilon_k}{x_k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_k}}$

gesetzt wird,

$$(41) \quad \frac{\vartheta_{n-n'}(x)}{F(x)} = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_n \\ U_2 & U_3 & \dots & U_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$U_i = \sum_{1,r}^k \frac{\varepsilon_k}{x_k^i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_k}}$$

identificirt man dagegen in (40)  $f(x_k)$  mit  $\frac{\varepsilon_k}{x_k} \left( 1 - \frac{x}{x_k} \right)$ , so wird nach (15):

$$(42) \quad \varphi_n(x) = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_2 & u_3 & \dots & u_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$u_i = \sum_{1,r}^k \frac{\varepsilon_k}{x_k^i} \left( 1 - \frac{x}{x_k} \right)$$

$$\begin{vmatrix} a_{nn} & a_{n+1n} \\ a_{n+1n} & a_{n+1n+1} \end{vmatrix} = D_{n+1} \cdot \frac{\partial^2 D_{n+1}}{\partial a_{nn} \cdot \partial a_{n+1n+1}}$$

oder, da

$$a_{nn} = \frac{\partial D_{n+1}}{\partial a_{nn}}, \quad a_{nn+1} = a_{n+1n} = \frac{\partial D_{n+1}}{\partial a_{nn+1}}$$

und

$$a_{n+1n+1} = D_n, \quad \frac{\partial^2 D_{n+1}}{\partial a_{nn} \partial a_{n+1n+1}} = D_{n-1}$$

$$(43) \quad D_{n+1} \cdot D_{n-1} = \frac{\partial D_{n+1}}{\partial a_{nn}} \cdot D_n - \left( \frac{\partial D_{n+1}}{\partial a_{nn+1}} \right)^2$$

Wird also  $D_n = 0$  für  $x = x_k$ , so wird für denselben Wert des  $x$

$$D_{n+1} \cdot D_{n-1} = - \left( \frac{\partial D_{n+1}}{\partial a_{nn+1}} \right)^2$$

d. h. es haben  $D_{n+1}$  und  $D_{n-1}$  entgegengesetzte Zeichen

Im vorigen Paragraphen ist aber gezeigt, dass die Functionen  $\frac{\vartheta_{m-n}}{F}$  und  $\varphi_n$  durch orthosymmetrische Determinanten dargestellt werden; denn der Factor  $(-1)^n$  hebt die Orthosymmetrie in Formel (41) und (42) nicht auf. Diesen Functionen kommt daher die besprochene Eigenschaft zu; man erhält speciell

$$(43^*) \quad \varphi_{n+1}(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) = \frac{\partial \varphi_{n+1}(x)}{\partial u_{2n-1}} \cdot \varphi_n(x) - \left( \frac{\partial \varphi_{n+1}(x)}{\partial u_{2n}} \right)^2$$

und

(43\*\*)

$$\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} \cdot \frac{\vartheta_{m-n-2}(x)}{F(x)} = \frac{\partial \left( \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} \right)}{\partial U_{2n-1}} \cdot \frac{\vartheta_{m-n-1}(x)}{F(x)} - \left( \frac{\partial \left( \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} \right)}{\partial U_{2n}} \right)^2$$

oder einfacher

$$\vartheta_{m-n}(x) \cdot \vartheta_{m-n-2}(x) = \frac{\partial \vartheta_{m-n}(x)}{\partial U_{2n-1}} \cdot \vartheta_{m-n-1}(x) - \left( \frac{\partial \vartheta_{m-n}(x)}{\partial U_{2n}} \right)^2$$

Einen andern Beweis verdankt man Joachimsthal<sup>2)</sup>. Nach (35) ist

$$\varphi_n(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ x^n & x^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}; \quad S_i = \frac{\varepsilon_1}{x_1^i} + \frac{\varepsilon_2}{x_2^i} + \dots + \frac{\varepsilon_r}{x_r^i}$$

Wir setzen

$$\varphi_n(x) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)}x + A_2^{(n)}x^2 + \dots + A_n^{(n)}x^n$$

und bezeichnen dem entsprechend die Coefficienten der übrigen Functionen  $\varphi$ .

Aus Gleichung (35) ersieht man leicht, dass

$$(44) \quad \sum_{1,r}^k \frac{\varepsilon_1}{x_k^i} \varphi_n(x_k) = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ S_{i-n} & S_{i-n+1} & \dots & S_i \end{vmatrix} \\ = \begin{cases} 0 & \text{für } n < i < 2n \\ -A_0^{(n+1)} & \text{für } i = 2n+1 \end{cases}$$

ist und diese Formeln reichen aus, um für die Functionen  $\varphi$  die Fundamenteigenschaft nachzuweisen. Dividirt man nämlich  $\varphi_{n+2}(x)$  durch  $\varphi_{n+1}(x)$ , so erhält man den Quotienten

$$\frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} + \frac{A_0^{(n+1)} \cdot A_1^{(n+2)} - A_0^{(n+2)} \cdot A_1^{(n+1)}}{A_0^{(n+1)} A_0^{(n+1)}} x$$

oder kürzer

$$\frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} + H \cdot x$$

und einen Rest  $-x^2 \cdot R(x)$ , indem wir die ganze Function  $n$ ten Grades

$$R(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots + \gamma_n x^n$$

setzen wollen, so dass

$$\varphi_{n+2}(x) = \left\{ \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} + H \cdot x \right\} \varphi_{n+1}(x) - x^2 \cdot R(x)$$

Um die Function  $R(x)$  wirklich zu bestimmen, summiren wir die Gleichung

$$\frac{\varepsilon_k}{x_k^i} \varphi_{n+2}(x) = \left\{ \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} \cdot \frac{\varepsilon_k}{x_k^i} + H \cdot \frac{\varepsilon_k}{x_k^{i-1}} \right\} \varphi_{n+1}(x_k) - \frac{\varepsilon_k}{x_k^{i-2}} R(x_k)$$

für  $k = 1, 2, \dots, r$  und nehmen in dem Resultate  $i = n+3, i = n+4, \dots, i = 2n+3$ ; dies giebt mit Rücksicht auf (44) die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_n \cdot S_1 + \gamma_{n-1} S_2 + \dots + \gamma_0 S_{n+1} \\ 0 &= \gamma_n \cdot S_2 + \gamma_{n-1} S_3 + \dots + \gamma_0 S_{n+2} \\ &\dots \dots \dots \\ 0 &= \gamma_n \cdot S_n + \gamma_{n-1} S_{n+1} + \dots + \gamma_0 S_{2n} \\ - \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} \cdot A_0^{(n+2)} &= \gamma_n S_{n+1} + \gamma_{n-1} S_{n+2} + \dots + \gamma_0 S_{2n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x^{n+1} & x^{n+2} & \dots & S_{2n+1} & \frac{A_0^{(n+1)}}{A_0^{(n+1)}} \\ x^n & x^{n-1} & \dots & 1 & -R(x) \end{vmatrix}$$

oder einfacher

$$A_0^{(n+1)} \cdot R(x) = \frac{A_0^{(n+2)} A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}}$$

Daher findet man schliesslich die gewü

$$(45) \quad \varphi_{n+2}(x) = \left\{ \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} + H \cdot x \right\} \cdot \varphi_{n+1}(x) -$$

Dasselbe Verfahren lässt sich auf die Fu.  
Es sei

$$\vartheta_{m-n}(x) = C_0^{(m-n)} + C_1^{(m-n)} x + C_2^{(m-n)} x^2 +$$

Multiplicirt man beide Seiten der Gleichung (

$$\frac{\Theta_{r-n}(x)}{T(x)} = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad \text{in de}$$

mit  $T(x)$  und beachtet, dass  $T(x) \cdot U_i$  sich fü  
reducirt (Gleichung (13)), so findet man

$$\frac{\Theta_{r-n}(x)}{T(x)} = \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} + H_1 x \right\} \frac{\Theta_{r-n-1}(x)}{T(x)} - x^2 \cdot \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \right\}^2 \frac{\Theta_{r-n-2}(x)}{T(x)}$$

**zu beweisen, setzen wir mit einer kleinen Umstellung**

$$\frac{\Theta_{r-n-2}(x)}{T(x)} = \left\{ \frac{C_0^{(m-n-1)}}{C_0^{(m-n)}} \cdot \frac{1}{x^2} + H_1' \cdot \frac{1}{x} \right\} \frac{\Theta_{r-n-1}(x)}{T(x)} - \frac{1}{x^2} \cdot R'(x)$$

**und machen für  $R'(x)$  den Ansatz**

$$R'(x) = \gamma_n U_n + \gamma_{n+1} U_{n+1} + \dots \gamma_{2n-1} U_{2n-1}.$$

Es werden danach die Ausdrücke  $\sum_{1,r}^k \varepsilon_k x_k i \frac{\Theta_{r-n-2}(x_k)}{T_1(x_k)}$  gebildet, die für  $i = n, i = n-1, \dots i = 1$  die folgenden Gleichungen ergeben

[illegible]

**Eliminieren wir aus diesen und der Gleichung**

$$R'(x) = \gamma_n \cdot U_n + \gamma_{n+1} \cdot U_{n+1} + \dots + \gamma_{2n-1} U_{2n-1}$$

die Grössen  $\gamma$ , so ergibt sich mit Rücksicht auf (31)

$$C_0^{(m-n)} R'(x) - \frac{C_0^{(m-n-1)} \cdot C_0^{(m-n-1)}}{C_0^{(m-n)}} \cdot \frac{\Theta_{r-n}(x)}{T(x)} = 0$$

**und daher schliesslich**

$$(47) \quad \Theta_{r-n}(x) = \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} + H_1 \cdot x \right\} \Theta_{r-n-1}(x) \\ - x^2 \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \right\}^2 \Theta_{r-n-2}(x).$$

Das Verfahren bei Ableitung dieser Gleichung entspricht nicht genau demjenigen, welches zu der Gleichung (45) führte; um die vollständige Symmetrie in der Herleitung beider Gleichungen wahren zu können, ist ein Umweg einzuschlagen <sup>4)</sup>.

Die wirkliche Berechnung (§ 1.) des bei der Division von  $\varphi_{n+2}(x)$  durch  $\varphi_{n+1}(x)$  gebliebenen Restes  $R(x)$  zeigt, dass in  $R(x)$  der Coef-  
ficient von  $x^k$

$$\gamma_k = \frac{1}{A_0^{(n+1)} \cdot A_0^{(n+1)}} \cdot \begin{vmatrix} A_0^{(n+2)} & 0 & A_0^{(n+1)} \\ A_1^{(n+2)} & A_0^{(n+1)} & A_1^{(n+1)} \\ A_{k+2}^{(n+2)} & A_{k+1}^{(n+1)} & A_{k+2}^{(n+1)} \end{vmatrix}$$

ist; aus Gleichung (45) aber folgt

$$\gamma_k = \left\{ \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} \right\}^2 \cdot A_k^{(n)}$$

und durch Gleichsetzung beider Werte von  $\gamma_k$

$$A_0^{(n+2)} \cdot A_0^{(n+2)} \cdot A_k^{(n)} = \begin{vmatrix} A_0^{(n+2)} & 0 & A_0^{(n+1)} \\ A_1^{(n+2)} & A_0^{(n+1)} & A_1^{(n+1)} \\ A_{k+2}^{(n+2)} & A_{k+1}^{(n+1)} & A_{k+2}^{(n+1)} \end{vmatrix}$$

Um diese Gleichung weiter zu vereinfachen, bezeichnen wir mit  $E$  die folgende Determinante, in der allgemein nach einer Differentiation  $a_{ik} = S_{i+k}$  gesetzt werden soll.

$$E = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} & a_{1n+1} & a_{1n+2} \\ a_{20} & a_{21} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} & a_{2n+1} & a_{2n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-k+10} & a_{n-k+11} & \dots & a_{n-k+1n-1} & a_{n-k+1n} & a_{n-k+1n+1} & a_{n-k+1n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} & a_{nn+1} & a_{nn+2} \\ a_{n+10} & a_{n+11} & \dots & a_{n+1n-1} & a_{n+1n} & a_{n+1n+1} & a_{n+1n+2} \\ a_{n+20} & a_{n+21} & \dots & a_{n+2n-1} & a_{n+2n} & a_{n+2n+1} & a_{n+2n+2} \\ a_{n+30} & a_{n+31} & \dots & a_{n+3n-1} & a_{n+3n} & a_{n+3n+1} & a_{n+3n+2} \end{vmatrix}$$

Nun ist allgemein

$$A_k^{(n)} = (-1)^{n+k} \begin{vmatrix} S_1 & \dots & S_{n-k} & S_{n-k+2} & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & \dots & S_{n-k+1} & S_{n-k+3} & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & \dots & S_{2n-k-1} & S_{2n-k+1} & \dots & S_{2n} \end{vmatrix}$$

also

$$A_0^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \frac{\partial^2 E}{\partial a_{n+2n+1} \partial a_{n+3n+2}}; \quad A_1^{(n+2)} = (-1)^n \frac{\partial E}{\partial a_{n+2n+2}}$$

$$A_{k+1}^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \frac{\partial^2 E}{\partial a_{n-k+1, n+1} \partial a_{n+3n+2}};$$

$$A_{k+2}^{(n+2)} = (-1)^n \frac{\partial E}{\partial a_{n-k+1, n+2}}$$

und daher die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1^{(n+2)} & A_0^{(n+1)} \\ A_{k+2}^{(n+2)} & A_{k+1}^{(n+1)} \end{vmatrix} = - \frac{\partial}{\partial a_{n+3n+3}} \begin{vmatrix} \frac{\partial E}{\partial a_{n+2n+2}} & \frac{\partial E}{\partial a_{n+2n+1}} \\ \frac{\partial E}{\partial a_{n-k+1n+2}} & \frac{\partial E}{\partial a_{n-k+1n+1}} \end{vmatrix}$$

oder

$$= - \frac{\partial}{\partial a_{n+3n+2}} \left( E \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial a_{n-k+1n+1} \partial a_{n+2n+2}} \right)$$

d. h.

$$= (-1)^{n+1} \cdot A_0^{(n+2)} \frac{\partial^2 E}{\partial a_{n-k+1n+1} \partial a_{n+2n+2}}$$

Führen wir diesen Wert in die Determinante dritten Grades ein, so ergibt sich die merkwürdige Gleichung

$$(48) \quad A_0^{(n+2)} \cdot A_k^{(n)} = \begin{vmatrix} A_0^{(n+1)} & A_1^{(n+1)} \\ A_{k+1}^{(n+1)} & A_{k+2}^{(n+1)} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial a_{n+k+1n+1} \partial a_{n+2n+2}} \end{vmatrix}$$

speciell für  $k=0$  erhält man hieraus

$$(48^*) \quad A_0^{(n+2)} \cdot A_0^{(n)} = \begin{vmatrix} A_0^{(n+1)} & A_1^{(n+1)} \\ A_1^{(n+1)} & A_2^{(n+1)} + (-1)^{n+1} \frac{\partial^2 E}{\partial a_{n+1n+1} \partial a_{n+2n+2}} \end{vmatrix}$$

Mit Hilfe dieser Formel kann die Gleichung (47) auf folgende Weise hergeleitet werden.

Die Division von  $\vartheta_{m-n}^{(x)}$  durch  $\vartheta_{m-n-1}^{(x)}$  gibt den Quotienten

$$\frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} + H_1 x \quad H_1 = \frac{C_0^{(m-n-1)} \cdot C_1^{(m-n)} - C_0^{(m-n)} C_1^{(m-n-1)}}{C_0^{(m-n-1)} C_0^{(m-n-1)}}$$

und einen Rest, der, abgesehen von dem Factor  $x^2$ , eine ganze Function  $(m-n-2)$ ten Grades von  $x$  ist. Wir setzen jetzt entsprechend dem Verfahren beim Beweise von (45)

$$\frac{\vartheta_{r-n}(x)}{T(x)} = \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} + H_1 x \right\} \cdot \frac{\vartheta_{r-n-1}(x)}{T(x)} - x^2 \cdot R_1(x)$$

und

$$R_1(x) = \gamma_{n+2} U_{n+2} + \gamma_{n+3} U_{n+3} + \dots + \gamma_{2n+3} U_{2n+3}.$$

Die Ausdrücke  $\sum_{1,r} \varepsilon_{rk} x_k \cdot \frac{\vartheta_{r-n}(x_k)}{T_1(x_k)}$ , welche wir aus den beiden vor-  
den Gleichungen bilden, liefern mit Rücksicht auf (46) für





$$L_{-3} = \frac{(-1)^n}{C_0^{(m-n-1)} C_0^{(m-n-1)}} \cdot \begin{vmatrix} D_0^{(m-n)} & 0 & D_0^{(m-n-1)} \\ D_1^{(m-n)} & D_0^{(m-n-1)} & D_1^{(m-n-1)} \\ D_2^{(m-n)} & D_1^{(m-n-1)} & D_2^{(m-n-1)} \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man ferner die Determinante  $\frac{\partial E}{\partial a_{n+3n+2}}$  mit  $D$ , so findet sich

$$\begin{vmatrix} D_1^{(m-n)} & D_0^{(m-n-1)} \\ D_2^{(m-n)} & D_1^{(m-n-1)} \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial a_{nn+1}} \begin{vmatrix} \frac{\partial D}{\partial a_{n+2n}} & \frac{\partial D}{\partial a_{n+2n+1}} \\ \frac{\partial D}{\partial a_{n+1n}} & \frac{\partial D}{\partial a_{n+1n+1}} \end{vmatrix} \\ = \frac{\partial}{\partial a_{nn+1}} \left( D \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial a_{n+1n} \partial a_{n+2n+1}} \right)$$

d. h.

$$= D_0^{(m-n)} \frac{\partial D}{\partial a_{nn+1}}$$

und daher

$$L_{-3} = \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)} C_0^{(m-n-1)}} \cdot \begin{vmatrix} D_0^{(m-n-1)} & D_1^{(m-n-1)} \\ D_1^{(m-n-1)} & \frac{\partial D}{\partial a_{nn+1}} + D_2^{(m-n-1)} \end{vmatrix}$$

Der Vergleich der letzten Determinante mit der in (48\*) zeigt die Identität beider; daraus folgt

$$L_{-3} = \frac{C_0^{(m-n)} \cdot A_0^{(n)} \cdot A^{(n+2)}}{C_0^{(m-n-1)} C_0^{(m-n-1)}} = C_0^{(m-n-2)} \cdot \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \right\}^2,$$

mithin

$$R_1(x) = \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \right\}^2 \cdot \frac{\Theta_{r-n-2}(x)}{T'(x)}$$

und

$$(47) \quad \Theta_{r-n}(x) = \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} + H_1 x \right\} \cdot \frac{\Theta_{r-n-1}(x)}{T'(x)} \\ - x^2 \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \right\}^2 \Theta_{r-n-2}(x)$$

### Litteratur.

1) Sylvester im Art. 11. seines Aufsatzes sub § 1. 3); vergl. auch Brioschi, Determinanten pag. 62.

2) vergl. sub § 7. 1) pag. 397. — Eine andere Ableitung dieser Gleichung giebt Jacobi „De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis“ (Crelle, Band 15. pag. 123)

3) Hattendorf in seiner Dissertation pag. 38.

4) Hattendorf in der zweiten Auflage pag. 35.

„Die Functionen  $\Phi_r(x)$ ,  $\Phi_{r-1}(x)$ , ...  $\Phi_2(x)$ ,  $\Phi_1(x)$ , 1 können zur Bestimmung der zwischen zwei reellen Grenzen liegenden Wurzeln von  $\Phi_r(x) = 0$  oder  $F(x) = 0$  benutzt werden.“

Wir begegnen hier zum ersten Male der Tatsache, dass es unendlich viele Reihen von Functionen giebt (wie man unendlich viele Functionen  $\chi(x)$  mit den angegebenen Eigenschaften bilden kann), welche den Sturm'schen Functionen äquivalent sind. Man gelangt von diesen allgemeinen Functionen  $\Phi(x)$  zu den  $\varphi(x)$  zurück, wenn man  $\chi(x_k)$  der positiven Constanten  $\varepsilon_k$  gleichsetzt; — man wird aber auch die Functionen  $\vartheta(x)$  aus ihnen ableiten können, wenn man mit  $\Phi_n(x)$  solche Transformationen vornimmt, dass die Function  $\mathfrak{T}_1(x)$  erster Divisor wird.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{1}{x_2} \frac{1}{x_3} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 &= \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 \cdot \frac{\varepsilon_1^2 \cdot x_1^{2r-4}}{\{T_1(x_1)\}^2}, \\ \delta \left( \frac{1}{x_3} \frac{1}{x_4} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 &= \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 \cdot (x_1 x_2)^{2r-4}}{\{T_1(x_1) \cdot T_1(x_2)\}^2} \cdot \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \right)^2, \\ &\dots \dots \dots \\ \delta \left( \frac{1}{x_{n+1}} \frac{1}{x_{n+2}} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 &= \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n)^2 \cdot (x_1 x_2 \dots x_n)^{2r-4}}{\{T_1(x_1) \cdot T_1(x_2) \dots T_1(x_n)\}^2} \times \\ &\hspace{15em} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n} \right)^2, \\ &\dots \dots \dots \\ \delta \left( \frac{1}{x_{r-1}} \frac{1}{x_r} \right)^2 &= \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{r-2})^2 \cdot (x_1 x_2 \dots x_{r-2})^{2r-4}}{\{T_1(x_1) \cdot T_1(x_2) \dots T_1(x_{r-2})\}^2} \times \\ &\hspace{15em} \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{r-2}} \right)^2, \\ 1 &= \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{r-1})^2 \cdot (x_1 x_2 \dots x_{r-1})^{2r-4}}{\{T_1(x_1) \cdot T_1(x_2) \dots T_1(x_{r-1})\}^2} \cdot \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{r-1}} \right)^2, \\ 1 &= \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r)^2 \cdot (x_1 x_2 \dots x_r)^{2r-4}}{\{T_1(x_1) \cdot T_1(x_2) \dots T_1(x_r)\}^2} \cdot \delta \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke werden in die Summenformeln für die Functionen  $\Phi$  eingesetzt; man erhält so

$$\begin{aligned} \Phi_r &= (-1)^r \frac{\lambda_1}{x_1} \dots \frac{\lambda_r}{x_r} \cdot \delta \left( \frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 \left( 1 - \frac{x}{x_1} \right) \dots \left( 1 - \frac{x}{x_r} \right) \\ \Phi_{r-1} &= \\ &(-1)^r \frac{\lambda_1}{x_1} \dots \frac{\lambda_r}{x_r} \cdot \delta \left( \frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 (-1)^{\sum} \frac{x_1 \cdot \varepsilon_1^2 \cdot x_1^{2r-4}}{\lambda_1 \{T_1(x_1)\}^2} \left( 1 - \frac{x}{x_2} \right) \dots \left( 1 - \frac{x}{x_r} \right) \end{aligned}$$

$$\Phi_{r-2} = (-1)^r \frac{\lambda_1}{x_1} \dots \frac{\lambda_r}{x_r} \cdot \delta \left( \frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 (-1)^2 \Sigma \frac{x_1 x_2}{\lambda_1 \lambda_2} \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 \cdot (x_1 x_2)^{2r-4}}{\{T_1(x_1) \cdot T_1(x_2)\}^2} \times$$

$$\delta \left( \frac{1}{x_1 x_2} \right)^2 \left( 1 - \frac{x}{x_2} \right) \dots \left( 1 - \frac{x}{x_r} \right)$$

$$\Phi_{r-n} =$$

$$(-1)^r \frac{\lambda_1}{x_1} \dots \frac{\lambda_r}{x_r} \cdot \delta \left( \frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 (-1)^n \Sigma \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n)^2 \cdot (x_1 x_2 \dots x_n)^{2r-4}}{\{T_1(x_1) \cdot T_1(x_2) \dots T_1(x_n)\}^2}$$

$$\times \delta \left( \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)^2 \left( 1 - \frac{x}{x_{n+1}} \right) \dots \left( 1 - \frac{x}{x_r} \right)$$

$$\Phi_1 =$$

$$(-1)^r \frac{\lambda_1}{x_1} \dots \frac{\lambda_r}{x_r} \delta \left( \frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 (-1)^{r-1} \Sigma \frac{x_1 x_2 \dots x_{r-1}}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{r-1}} \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{r-1})^2 \cdot (x_1 x_2 \dots x_{r-1})^{2r-4}}{\{T_1(x_1) \cdot T_1(x_2) \dots T_1(x_{r-1})\}^2}$$

$$\times \delta \left( \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_{r-1}} \right)^2 \left( 1 - \frac{x}{x_r} \right)$$

$$1 = \Phi_0 =$$

$$(-1)^r \frac{\lambda_1}{x_1} \dots \frac{\lambda_r}{x_r} \cdot \delta \left( \frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_r} \right)^2 (-1)^r \Sigma \frac{x_1 x_2 \dots x_r}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r} \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r)^2 \cdot (x_1 x_2 \dots x_r)^{2r-4}}{\{T_1(x_1) \cdot T_1(x_2) \dots T_1(x_r)\}^2}$$

$$\times \delta \left( \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_r} \right)^2$$

Wir lassen den gemeinsamen Factor aller  $\Phi$  fort und vertauschen  $\frac{\varepsilon_k^2 \cdot x_k^{2r-2}}{\lambda_k \{T_1(x_k)\}^2}$  mit  $\lambda_k$ , so dass wieder  $\lambda$  eine sonst beliebige rationale Function von  $x$  bezeichnet, die nur den oben erwähnten Voraussetzungen genügt. Setzen wir daher allgemein

$$(15^*) \quad \Theta_{r-n}(x) = (-1)^n \Sigma \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \cdot \delta \left( \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)^2 \left( 1 - \frac{x}{x_{n+1}} \right) \dots \left( 1 - \frac{x}{x_r} \right)$$

$$= C_0^{(r-n)} + C_1^{(r-n)} x + \dots + C_n^{(r-n)} x^n$$

so ist auch

$$(47^*) \quad \Theta_{r-n}(x) = \left\{ \frac{C_0^{(r-n)}}{C_0^{(r-n-1)}} + H_1 x \right\} \Theta_{r-n-1}(x) - x^2 \left\{ \frac{C_0^{(r-n)}}{C_0^{(r-n-1)}} \right\}^2 \Theta_{r-n-2}(x)$$

und für die Functionen

$$\Theta_r(x), \quad \Theta_{r-1}(x), \quad \dots \quad \Theta_2(x), \quad \Theta_1(x), \quad \Theta_0(x)$$

ist der Sturm'sche Satz. Ist endlich speciell  $\lambda(x_k) = \varepsilon_k$ , so wird  $\Theta_{r-n}(x)$  zu  $\theta_{r-n}(x)$  und die Gleichung (47\*) geht in (47) über, wenn in ihr

$$\begin{aligned}\Theta_{r-n} &= \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) \cdot \theta_{r-n} \\ &= C_0^{(m-n)} + C_1^{m-n}x + \dots + C_n^{m-n}x^n\end{aligned}$$

setzen.

### Litteratur:

Die § 7. 1) erwähnte Abhandlung von Joachimsthal (pag. 40).

### § 11.

Aus der Gleichung

$$(11^*) \quad x^{2(n-1)} \cdot T_n(x) = T_1(x) \cdot q_1 q_{n-1} - T'(x) \cdot q_2 q_{n-1}$$

folgt, wenn  $T_n(x) = u(q_1 q_{n-1})$  gesetzt wird,

$$(49) \quad T_n(x_k) = u_k(q_1 q_{n-1})_k$$

für  $k = 1, 2, \dots, r$ , wo  $u_k$  den Wert  $\frac{T_1(x_k)}{x_k^{2(n-1)}} = \frac{\epsilon_k \cdot T'(x_k)}{x_k^{2(n-1)}}$  hat und unter  $(q_1 q_{n-1})_k$  der Wert verstanden wird, welchen  $q_1 q_{n-1}$  für  $x = x_k$  annimmt. Eliminirt man aus den  $r$  Gleichungen (49) und aus der Gleichung

$$T_n(x) = u \cdot q_1 q_{n-1}$$

die  $r+1$  Coefficienten von  $T_n(x)$  und  $q_1 q_{n-1}$  und entwickelt die Determinanten, welche den Zähler und Nenner von  $u$  bilden, so erhält man die Cauchy'sche Formel (22), aus der sich dann, wie im § 4. gezeigt wurde, die Ausdrücke der  $\vartheta$  und  $\varphi$  durch die Wurzeln der Gleichung  $T(x) = 0$  ergeben. — Bleibt man aber bei den unentwickelten Determinanten stehen, so werden die Functionen  $q_1 q_{n-1}$  und  $T_n(x)$  direct als Determinanten gefunden. Diese Herleitung liefert zugleich einen neuen Beweis dafür, dass die Zeichenreihen der bez. durch die Gleichungen (35) und (26) definirten Functionen  $\varphi$  und  $\theta$  den Zeichenreihen der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung äquivalent sind.

Wir eliminiren aus den  $r$  Gleichungen (49) zuerst die  $(r-n)$  Coefficienten von  $T_n(x)$  und danach aus den nach der Elimination erhaltenen Gleichungen und aus

$$(50) \quad q_1 q_{n-1} = \alpha_0^{(n-1)} + \alpha_1^{(n-1)}x + \alpha_2^{(n-1)}x^2 + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)}x^{n-1}$$

auch die  $n$  Coefficienten von  $q_1 q_{n-1}$ .

Nach (49) ist

$$(51) \quad \sum_{1,r}^k \frac{x_k^i \cdot T_n(x_k)}{T'(x_k)} = \sum_{1,r}^k \frac{x_k^i \cdot u_k \cdot (q_1 q_{n-1})_k}{T'(x_k)}$$

## Die Partialbruchzerlegung gibt die Identität

$$(52) \quad \frac{T_n(x)}{T(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{T_n(x_k)}{(x-x_k)T'(x_k)}$$

Entwickelt man beide Seiten der Gleichung (52) nach fallenden Potenzen von  $x$ , so beginnt die Reihe links mit einem Gliede, welches  $\frac{1}{x^n}$  enthält, es müssen daher alle Glieder der rechten Seite, welche mit einer höheren Potenz von  $x$ , als der  $-n$ -ten multiplicirt sind, identisch verschwinden, d. h. es muss

$$\sum_{l=1}^k \frac{x_k^l \cdot T_n(x_k)}{T'(x_k)} = 0 \text{ sein für } i = n-2, n-3, \dots, 2, 1, 0$$

Es ist also nach (51) auch  $\sum_{1,r}^k \frac{x_k^i \cdot u_k \cdot (q_1 q_{n-1})_k}{T'(x_k)}$  oder wenn man für  $u_k$  seinen Wert  $\frac{\varepsilon_k \cdot T'(x_k)}{x_k^{2(n-1)}}$  substituirt,

$$(51^*) \quad \sum_{1 \leq r}^k \frac{x_k^i \cdot \varepsilon_k \cdot (q_1 q_{n-1})^k}{x_k^{2(n-1)}} = 0 \text{ für } i = n-2, n-3, \dots 1, 0$$

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf die Definitionsgleichung für  $q_1 q_{n-1}$  das folgende System von Gleichungen

$$(53) \quad \begin{cases} \alpha_0^{(n-1)} S_n + \alpha_1^{(n-1)} S_{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} S_1 = 0 \\ \alpha_0^{(n-1)} S_{n+1} + \alpha_1^{(n-1)} S_n + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} S_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0^{(n-1)} S_{2n-2} + \alpha_1^{(n-1)} S_{2n-3} + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} S_{n-1} = 0 \end{cases}$$

**Aus diesem folgt in Verbindung mit (50)**

$$q_1 q_{n-1} = \frac{\alpha_0^{(n-1)}}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Es sei  $\gamma_0^{(r-n)}$  die Constante in  $T_n(x)$ ; wir finden für diese, wenn wir in (52)  $x = 0$  setzen, den Wert

$$\gamma_0^{(r-n)} = - \sum_{1, r}^k \frac{T_n(x_k)}{x_k \cdot T'(x_k)}$$

**nach (51)**

$$\gamma_0^{(r-n)} = - \sum_{1,r}^k \frac{u_k \cdot (q_1 q_{n-1})_k}{x_k \cdot T'(x_k)} = - \sum_{1,r}^k \frac{\varepsilon_k \cdot (q_1 q_{n-1})_k}{x_k \cdot x_k^{2n-2}}$$

also entwickelt

$$\gamma_0^{(r-n)} = -(\alpha_0^{(n-1)} S_{2n-1} + \alpha_1^{(n-1)} S_{2n-2} + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} S_n)$$

Verbinden wir diese Gleichung mit dem System (53), so erhalten wir die Relation

$$(54) \quad -\gamma_0^{(r-n)} \Delta_{n-1} = \alpha_0^{(n-1)} \Delta_n$$

daher ist auch

$$(55) \quad q_1 q_{n-1} = - \frac{\gamma_0^{(r-n)}}{\Delta_n} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Es bleibt noch der constante Factor  $-\frac{\gamma_0^{(r-n)}}{\Delta_n}$  zu bestimmen. Die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^{2(n-1)} \cdot T_n(x) &= T_1(x) \cdot q_1 q_{n-1} - T'(x) \cdot q_2 q_{n-1} \\ x^{2(n-2)} \cdot T_{n-1}(x) &= T_1(x) \cdot q_1 q_{n-2} - T'(x) \cdot q_2 q_{n-2} \end{aligned}$$

geben mit Rücksicht darauf, dass

$$q_1 q_{n-2} \cdot q_2 q_{n-1} - q_2 q_{n-2} \cdot q_1 q_{n-1} = x^{2(n-1)} \text{ ist:}$$

$$T(x) = T_{n-1}(x) \cdot q_1 q_{n-1} - x^2 \cdot T_n(x) \cdot q_1 q_{n-2}$$

Die constanten Glieder müssen beiderseits dieselben sein

$$1 = \gamma_0^{(r-n+1)} \cdot \alpha_0^{(n-1)}$$

Die Elimination von  $\alpha_0^{(n-1)}$  aus der letzten Gleichung und aus (54) führt zu der Recursionsformel

$$\gamma_0^{(r-n)} = - \frac{1}{\gamma_0^{(r-n+1)}} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

Nun ist die Constante in  $T_1(x)$

$$\gamma_0^{(r-1)} = - \sum_{r,1}^k \frac{\varepsilon_k}{x_k} = -S_1 = -\Delta_1$$

also allgemein

$$\begin{aligned} \gamma_0^{(r-2n)} &= \frac{(\Delta_2 \Delta_4 \dots \Delta_{2n-2})^2}{(\Delta_1 \Delta_3 \Delta_5 \dots \Delta_{2n-1})^2} \Delta_{2n} \\ \gamma_0^{(r-2n-1)} &= - \frac{(\Delta_1 \Delta_3 \dots \Delta_{2n-1})^2}{(\Delta_2 \Delta_4 \dots \Delta_{2n})^2} \Delta_{2n+1} \end{aligned}$$

Es unterscheidet sich also  $q_1 q_{n-1}$  von der durch Gleichung (35) definirten Function  $\varphi_{n-1}(x)$  nur durch einen stets positiven Factor.

Man kann  $T_n(x)$  in analoger Weise wie  $q_1 q_{n-1}$  ableiten; denn aus der Gleichung  $T_n(x_k) = u_k \cdot (q_1 q_{n-1})_k$  folgt auch

$$(51a) \quad \sum_{1,r}^k \frac{x_k^i \cdot (q_1 q_{n-1})_k}{T'(x_k)} = \sum_{1,r}^k \frac{x_k^i \cdot T_n(x_k)}{u_k \cdot T'(x_k)}$$

Die Partialbruchzerlegung von  $\frac{q_1 q_{n-1}}{T(x)}$  zeigt, dass die linke Seite der Gleichung (51a) den Wert Null hat für  $i = 0, 1, \dots, r - n - 1$  und den Wert  $-\alpha_0^{(n-1)}$  für  $i = -1$ , also ist

$$(51^*a) \quad \sum_{1,r}^k \frac{x_k^i \cdot T_n(x_k)}{u_k \cdot T'(x_k)} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0, 1, \dots, r-n-1, \\ -\alpha_0^{(n-1)} & \text{für } i = -1, \end{cases}$$

oder, da  $u_k = \frac{T_1(x_k)}{x_k^{2(n-1)}}$ ,

$$\sum_{1, r}^k \frac{x_k^\lambda \cdot T_n(x_k)}{T_1(x_k) \cdot T'(x_k)} = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda = 2n-2, 2n-1, \dots, r+n-3, \\ -\alpha_0^{(n-1)} & \text{für } \lambda = 2n-3. \end{cases}$$

## Setzen wir daher

$$T_n(x) = \gamma_0^{(r-n)} + \gamma_1^{(r-n)}x + \dots + \gamma_{r-n}^{(r-n)}x^{r-n}$$

**und bezeichnen noch**

$$\sum_{1,r}^k \frac{x_k^\lambda}{T_1(x_k) \cdot T'(x_k)} \quad \text{mit } v_{2r-2-\lambda}.$$

**so erhalten wir dies System von Gleichungen**

[illegible]

**und**

(56\*)

$$-\alpha_0^{n-1} = \gamma_{r-n}^{(r-n)} \cdot v_{r-n+1} + \gamma_{r-n-1}^{(r-n)} \cdot v_{r-n+2} + \dots + \gamma_0^{(r-n)} \cdot v_{2r-2n+1}$$

Wir substituiren die Werte, welche sich aus (56) für die Verhältnisse der Coefficienten von  $T_n(x)$  ergeben, in den Ausdruck für  $\lambda$  und finden so

$$T_n(x) = \frac{\gamma_0^{(r-n)}}{R_{r-n}} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{r-n+1} \\ v_2 & v_3 & \dots & v_{r-n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{r-n} & v_{r-n+1} & \dots & v_{2r-2n} \\ x^{r-n} & x^{r-n+1} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_{r-n} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{r-n} \\ v_2 & v_3 & \dots & v_{r-n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{r-n} & v_{r-n+1} & \dots & v_{2r-2n-1} \end{vmatrix}$$

Zur Bestimmung des constanten Factors  $\frac{\gamma_0^{(r-n)}}{R_{r-n}}$  ergibt sich aus (56) und (56\*) die Formel

$$\gamma_0^{(r-n)} \cdot R_{r-n+1} = -\alpha_0^{(n-1)} \cdot R_{r-n}$$

$$\text{d. i.} = -\frac{1}{\gamma_0^{(r-n+1)}} R_{r-n} \quad (\text{da } \alpha_0^{(n-1)} \cdot \gamma_0^{(r-n+1)} = 1 \text{ (pag. 54)})$$

durch deren wiederholte Anwendung man zeigt, dass

$$R_{r-n} = (-1)^n \cdot \gamma_0^{(r-n)} \cdot (\gamma_0^{(r-n+1)})^2 \cdot (\gamma_0^{(r-n+2)})^2 \dots (\gamma_0^{(r-1)})^2 \cdot \gamma_0^{(r)} \cdot R_r$$

ist. Es ist daher die durch die Determinanten

$$(-1)^n \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{r-n+1} \\ v_2 & v_3 & \dots & v_{r-n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{r-n} & v_{r-n+1} & \dots & v_{2r-2n} \\ x^{r-n} & x^{r-n+1} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (n = 0, 1, \dots, r)$$

dargestellte Functionenreihe der Sturm'schen zweiter Gattung äquivalent.

Um aber  $T_n(x)$  ebenso wie  $q_1 q_{n-1}$  durch eine Determinante  $n$ ten Grades darzustellen, ersetzen wir in (52)  $T_n(x_k)$  durch  $u_k(q_1 q_{n-1})_k = \frac{\varepsilon_k \cdot T'(x_k) (q_1 q_{n-1})_k}{x_k^{2(n-1)}}$ ; es wird

$$\frac{T_n(x)}{T(x)} = - \sum \frac{\varepsilon_k \cdot (q_1 q_{n-1})_k}{x_k \cdot x_k^{2(n-1)} \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)}$$

oder

$$- \frac{T_n(x)}{T(x)} = \alpha_0^{(n-1)} \cdot U_{2n-1} + \alpha_1^{(n-1)} \cdot U_{2n-2} + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} \cdot U_n$$

wo wieder mit  $U_i$  die Summe  $\sum_{1,r}^k \frac{\varepsilon_k}{x_k^i} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_k}\right)}$  bezeichnet ist. Ver-

bindet man diese Gleichung mit dem System (53), so sieht man, dass







$$a_k = \alpha_k^{(r)} \cdot F_r(x)$$

$$b_k = \beta_k^{(r)} \cdot F_r(x)$$

Ferner müssen auf der linken Seite von (57) auch alle Glieder, welche die Potenzen  $x^n$ ,  $x^{n+1}$ , ...  $x^{2n-1}$  enthalten, verschwinden; dies giebt die Gleichungen

$$(59) \quad \begin{aligned} & \alpha_n^{(n)}.S_1 + \alpha_{n-1}^{(n)}.S_2 + \dots + \alpha_0^{(n)}.S_{n+1} = 0 \\ & \alpha_n^{(n)}.S_2 + \alpha_{n-1}^{(n)}.S_3 + \dots + \alpha_0^{(n)}.S_{n+2} = 0 \\ & . . . . . \\ & \alpha_n^{(n)}.S_n + \alpha_{n-1}^{(n)}.S_{n+1} + \dots + \alpha_0^{(n)}.S_{2n} = 0 \end{aligned}$$

**Stellt man mit dem System (59) die Gleichung**

$$\alpha_n^{(n)} . x^n + \alpha_{n-1}^{(n)} . x^{n-1} + \dots + \alpha_0^{(n)} = q_1 q_n$$

**zusammen, so findet sich**

$$(60) \quad q_1 q_n = \frac{\alpha_0^{(n)}}{\Delta_n} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ x^n & x^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Durch Vergleich der Coefficienten von  $x^{2n}$  in (57) gewinnt man die Relation

$$\alpha_n^{(n)}.S_{n+1} + \alpha_{n-1}^{(n)}.S_{n+2} + \dots + \alpha_0^{(n)}.S_{2n+1} = -\frac{1}{\alpha_0^{(n+1)}}$$

**aus der in Verbindung mit (59) die Recursionsformel**

$$(61) \quad \alpha_0^{(n+1)} = -\frac{1}{\alpha_0^{(n)}} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}$$

**erhalten wird.**

Nun ist nach (60)  $q_1 = \frac{\alpha_0^{(1)}}{\Delta_1} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 \\ x & 1 \end{vmatrix} = \alpha_1 + \beta_1 x$ , also  $\alpha_1 = \alpha_0^{(1)}$ ;

sodann ist  $\alpha_1 = \frac{1}{b_0}$  und  $b_0$  die Constante in  $F_1(x)$  gleich der Constanten in  $T_1(x)$  d. i.  $= -S_1$  nach (13), also

$$\alpha_0^{(1)} = -\frac{1}{S_1} = -\frac{1}{A_1}$$

**Daher hat man nach (61) allgemein**

$$(62) \quad \alpha_0^{(2n)} = \frac{(\Delta_1 \Delta_3 \Delta_5 \dots \Delta_{2n-1})^2}{(\Delta_2 \Delta_4 \dots \Delta_{2n-2})^2} \cdot \frac{1}{\Delta_{2n}}$$

$$\alpha_0^{(2n+1)} = - \frac{(\Delta_2 \Delta_4 \dots \Delta_{2n})^2}{(\Delta_1 \Delta_3 \dots \Delta_{2n-1})^2} \cdot \frac{1}{\Delta_{2n+1}}$$

Diese Formeln zeigen, dass  $q_1 q_n$ , abgesehen von einem wesentlich positiven Factor, mit

$$(35) \quad \varphi_n(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ x^n & x^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

identisch ist.

Da man aus diesem Wert von  $\varphi_n(x)$  leicht seinen Ausdruck durch die Wurzeln von  $F(x) = 0$  ableitet, so kann man zur Bestimmung von  $\theta_{r-n}(x)$  sich hier, wie auch im letzten Paragraphen, der Methode des Herrn Prof. Stern (§ 4.) bedienen; man erhält dann freilich für  $\theta_{r-n}(x)$  die Darstellung durch die Wurzeln.

Um im Anschluss an die vorhergehenden Betrachtungen  $\theta_{r-n}(x)$  sofort als Determinante aufzustellen, bemerken wir, dass nach (11)

$$x^{2n} \cdot \frac{F_{n+1}(x)}{F(x)} = q_1 q_n \cdot \frac{F_1(x)}{F(x)} - q_2 q_n$$

ist. Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung nach wachsenden Potenzen von  $x$ , so beginnt nach (57) die Reihe erst mit  $x^{2n}$ ; es wird also

$$x^{2n} \cdot \frac{F_{n+1}(x)}{F(x)} = - \sum_{0, \infty}^{\lambda} x^{2n+\lambda} \{ \alpha_n^{(n)} \cdot S_{n+\lambda+1} + \alpha_{n-1}^{(n)} \cdot S_{n+\lambda+2} + \dots + \alpha_0^{(n)} \cdot S_{2n+\lambda+1} \}$$

oder

$$\frac{F_{n+1}(x)}{F(x)} = - \left( \alpha_n^{(n)} \sum_{0, \infty}^{\lambda} \sum_{1, r}^k \frac{x^{\lambda} \cdot \varepsilon_k}{x_k^{n+\lambda+1}} + \alpha_{n-1}^{(n)} \sum_{0, \infty}^{\lambda} \sum_{1, r}^k \frac{x^{\lambda} \cdot \varepsilon_k}{x_k^{n+\lambda+2}} + \dots + \alpha_0^{(n)} \sum_{0, \infty}^{\lambda} \sum_{1, r}^k \frac{x^{\lambda} \cdot \varepsilon_k}{x_k^{2n+\lambda+1}} \right)$$

Wir vertauschen hier die Reihenfolge der Summation und setzen für  $\sum_{0, \infty}^{\lambda} \frac{x^{\lambda}}{x_k^{n+\lambda+r}}$  den gleichgeltenden Ausdruck  $\frac{1}{x_k^{n+r} \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)}$ ; dadurch

vereinfacht sich die letzte Gleichung zu

$$\frac{F_{n+1}(x)}{F(x)} = - (\alpha_n^{(n)} \cdot U_{n+1} + \alpha_{n-1}^{(n)} \cdot U_{n+2} + \dots + \alpha_0^{(n)} \cdot U_{2n+1})$$

Aus dieser und dem System (59) folgt

$$\frac{F_{n+1}(x)}{F(x)} = -\frac{\alpha_0^{(n)}}{\Delta_n} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ U_{n+1} & U_{n+2} & \dots & U_{2n+1} \end{vmatrix}$$

und daher ist bis auf einen positiven constanten Factor  $\frac{F_{n+1}(x)}{F(x)}$  gleich

$$(26) \quad \frac{\theta_{r-n-1}(x)}{T(x)} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ U_{n+1} & U_{n+2} & \dots & U_{2n+1} \end{vmatrix}$$

### Litteratur:

Das in diesem Paragraphen eingeschlagene Verfahren verdanke ich einer Mitteilung des Herrn Prof. Stern. — Vergl. noch Hanckel „Ueber die Transformation von Reihen in Kettenbrüche“ (Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik. 7. Jahrgang. pag. 338).

### § 13.

Die Functionen  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  sollen endlich unmittelbar durch die Coefficienten von  $F(x)$  und  $F_1(x)$  ausgedrückt werden. Wir ersetzen zu dem Zwecke die Determinante  $n$ ten Grades in (27) durch die folgende vom Grade  $2n-1$

$$\vartheta_{n-n}(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & S_1 & S_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & S_2 & S_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & S_1 & \dots & S_{n-2} & S_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} & S_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_2 & S_3 & \dots & S_n & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-3} & S_{2n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & V_n & V_{n+1} & \dots & V_{2n-2} & V_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Der gewählten Bezeichnung zufolge ist  $V_i = F(x) \cdot U_i$ , also nach (32)

$$V_i = -\frac{F_1(x)}{x^{i-1}} - F(x) \left\{ \frac{S_{i-1}}{x} + \frac{S_{i-2}}{x^2} + \dots + \frac{S_2}{x^{i-2}} + \frac{S_1}{x^{i-1}} \right\}$$

addiren wir daher die erste, zweite, ...  $(2n-2)$ te Horizontalreihe, indem dieselben bez. mit  $\frac{F(x)}{x^{2n-2}}$ ,  $\frac{F(x)}{x^{2n-3}}$ , ...  $\frac{F(x)}{x}$  multiplicirt sind



$$(64) \quad \vartheta_{m-n}(x) =$$

1	0	...	0	0	0	...	0	$a_1$
$a_1$	1	...	0	0	0	...	$a_1$	$2a_2$
$a_2$	$a_1$	...	0	0	0	...	$2a_2$	$3a_3$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$a_{n-2}$	$a_{n-3}$	...	1	0	$a_1$	...	$(n-2)a_{n-2}$	$(n-1)a_{n-1}$
$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	...	$a_1$	$a_1$	$2a_2$	...	$(n-1)a_{n-1}$	$na_n$
$a_n$	$a_{n-1}$	...	$a_2$	$2a_2$	$3a_3$	...	$na_n$	$(n+1)a_{n+1}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$a_{2n-3}$	$a_{2n-4}$	...	$a_{n-1}(n-1)$	$a_{n-1}$	$na_n$	...	$(2n-3)a_{2n-3}$	$(2n-2)a_{2n-2}$
$F(x)$	$x.F(x)$	...	$x^{n-2}.F(x)$	$x^{n-1}.F'(x)$	$x^{n-2}.F'(x)$	...	$x.F'(x)$	$F'(x)$

Aus dieser Determinante leiten sich die übrigen Grössen, genau wie vorhin aus (63) ab.

#### Litteratur:

Cayley „Nouvelles Recherches sur les fonctions de M. Sturm“ (Liouville. Journal T. 13. pag. 269). Das Vorzeichen von Cayley's Functionen berichtigt Hattendorf, Dissertation § 9. — Vergl. noch Brioschi in der Abhandlung unter § 11.

#### § 14.

Auch die im vorigen Paragraphen entwickelten Ausdrücke können direct erhalten werden. Setzt man nämlich in (11)

$$\varphi_{n-1}(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_{n-1}x^{n-1}$$

$$\psi_{n-2}(x) = B_0 + B_1x + \dots + B_{n-2}x^{n-2}$$

und beachtet, dass die niedrigste Potenz von  $x$  auf der linken Seite die  $2(n-1)$ te ist, dass also auch auf der rechten Seite das constante Glied und die Coefficienten von  $x$ ,  $x^2$ , ...  $x^{2n-3}$  verschwinden müssen, so ergeben sich folgende Gleichungen

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 0 & = & B_0 & - & 0 & & \dots & & 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & + & b_0 & A_0 \\
 0 & = & a_1 & B_0 & - & B_1 & - & \dots & 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & + & b_1 & A_1 + b_1 & A_0 \\
 0 & = & a_2 & B_0 & - & a_1 B_1 & - & \dots & 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & + & b_2 & A_1 + b_2 & A_0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & = & a_{n-2} & B_0 & - & a_{n-3} B_1 & - & \dots & B_{n-2} & + & 0 & + & \dots & + & b_0 & A_{n-2} & + & \dots & + & b_{n-3} A_1 + b_{n-2} A_0 \\
 0 & = & a_{n-1} & B_0 & - & a_{n-2} B_1 & - & \dots & B_{n-2} & + & b_0 & A_{n-1} & + & \dots & + & b_1 & A_{n-2} & + & \dots & + & b_{n-2} A_1 + b_{n-1} A_0 \\
 0 & = & a_n & B_0 & - & a_{n-1} B_1 & - & \dots & B_{n-2} & + & b_1 & A_{n-1} & + & \dots & + & b_2 & A_{n-2} & + & \dots & + & b_{n-1} A_1 + b_n A_0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & = & a_{2n-3} B_0 & - & a_{2n-4} B_1 & - & \dots & a_{n-1} B_{n-2} & + & b_{n-2} A_{n-1} & + & \dots & + & b_{2n-4} A_1 & + & b_{2n-3} A_0 \\
 x^{2n-2} \vartheta_{n-n}(x) & = & -F(x) B_0 & - & x F(x) B_1 & - & \dots & -x^{n-2} F(x) B_{n-2} & + & x^{n-1} F_1(x) A_{n-1} & + & x^{n-2} F_1(x) A_{n-2} & + & \dots & + & x F_1(x) A_1 & + & F_1(x) A_0
 \end{array}$$



Bezeichnet man daher mit  $D_n$  und  $\xi_{n-1}$  die Determinanten

$D_n =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 & b_0 & \dots & b_{n-3} & b_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} & \dots & b_{2n-4} & b_{2n-3} \\ F(x) & x.F(x) & \dots & x^{n-2}.F(x) & x^{n-1}.F_1(x) & x^{n-2}.F_1(x) & \dots & x.F_1(x) & F_1(x) \end{vmatrix}$$

$$\xi_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-4} & a_{2n-5} & \dots & a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} & \dots & b_{2n-5} & b_{2n-4} \end{vmatrix}$$

so wird

$$x^{2(n-1)}.\vartheta_{m-n}(x).\xi_{n-1} = A_0.D_n$$

oder wenn  $A_0 = \xi_{n-1}$  genommen und der stets positive Factor  $x^{2(n-1)}$  unterdrückt wird,

$$(65) \quad \vartheta_{m-n}(x) = D_n$$

Es ist noch zu zeigen, dass diese Function mit  $F_n(x)$  im Vorzeichen übereinstimmt. Da  $\vartheta_{m-n}(x)$  und  $\varphi_n(x)$  dasselbe constante Glied,  $\xi_n$ , haben, so findet man hier wie im § 3. die Relation

$$\lambda_n.\lambda_{n-1} = \xi_n^2$$

aus der folgt, dass die constanten Factoren, durch welche sich die Functionen  $F$  von den Functionen  $\vartheta$  unterscheiden, sämmtlich dasselbe Vorzeichen haben. Nun unterscheidet sich aber das constante Glied in  $F_2(x)$

$$\frac{1}{b_0^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & b_0 \\ a_1 & b_0 & b_1 \\ a_2 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

nur durch den positiven Factor  $\frac{1}{b_0^2}$  von der Constanten in  $\vartheta_{m-2}(x)$ , es haben daher überhaupt die durch (65) dargestellten Functionen mit den Functionen  $F$  gleiches Vorzeichen. — Die Gleichung (65) identisch mit (63).

Bei dem gewöhnlichen, bisher betrachteten Reste zu bilden, wurde die Division bis der Quotient ein Binom darstellte. Man Division schon nach einmaliger Ausführung Dann erhält man folgendes Schema

$$\begin{aligned} F(x) &= \alpha_0 \cdot F_1(x) + x \cdot U_2; & F_1(x) \\ U_2 &= \alpha_2 \cdot W_3 + x \cdot U_4; & W_3 \\ U_4 &= \alpha_4 \cdot W_5 + x \cdot U_6; & W_5 \\ (66) \quad &\dots\dots\dots \\ U_{2n-2} &= \alpha_{2n-2} \cdot W_{2n-1} + x \cdot U_{2n}; & W_{2n-1} \\ &\dots\dots\dots \\ U_{2r-2} &= \alpha_{2r-2} \cdot W_{2r-1} + x \cdot U_{2r}; & W_{2r-1} \end{aligned}$$

dem der Kettenbruch entspricht

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = \alpha_0 + \frac{x}{\alpha_1 + \frac{x}{\alpha_2 + \dots + \frac{x}{\alpha_{2r-2} + \dots}}}$$

Wir nehmen an, dass in keiner der F constante Glied und der Coefficient der höchsten Potenzen von x nicht verschwinden. Unter dieser Voraussetzung

eliminiren wir aus (66) die  $U$  und vergleichen die entstehenden Gleichungen mit (3); es findet sich

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \frac{1}{\alpha_1} W_3; & F_3(x) &= \frac{\alpha_1}{\alpha_3} W_5 \\ F_4(x) &= \frac{\alpha_3}{\alpha_1 \alpha_5} W_7; & F_5(x) &= \frac{\alpha_1 \alpha_5}{\alpha_3 \alpha_7} W_9 \\ &\dots & & \dots \\ F_{2n}(x) &= \frac{\alpha_3 \alpha_7 \dots \alpha_{4n-3}}{\alpha_1 \alpha_5 \alpha_9 \dots \alpha_{4n-3}} W_{4n-1}; & F_{2n+1}(x) &= \frac{\alpha_1 \alpha_5 \dots \alpha_{4n-3}}{\alpha_3 \alpha_7 \dots \alpha_{4n-1}} W_{4n+1} \\ &\dots & & \dots \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, a_1, a_2, \dots a_m && \text{die Coefficienten von } F(x), \\ b_0, b_1, b_2, \dots b_{m-1} && \text{die Coefficienten von } F_1(x), \\ &\dots && \\ c_0^{(2n-1)}, c_1^{(2n-1)}, c_2^{(2n-1)}, \dots c_{m-n}^{(2n-1)} && \text{die Coefficienten von } W_{2n-1}, \\ c_0^{(2n)}, c_1^{(2n)}, c_2^{(2n)}, \dots c_{m-n}^{(2n)} && \text{die Coefficienten von } U_{2n} \end{aligned}$$

in der Reihenfolge, wie sie wachsenden Potenzen von  $x$  entsprechen, so erhält man unmittelbar aus dem Gange der Division zur Berechnung der Coefficienten die Recursionsformel

$$(67) \quad c_s^{(k+2)} = c_{s+1}^{(k)} - \alpha_k c_{s+1}^{(k+1)}$$

wobei  $c_s^{(0)} = a_s$  und  $c_s^{(1)} = b_s$ , und für den Theilnenner  $\alpha_k$  den Wert

$$(68) \quad \alpha_k = \frac{c_0^{(k)}}{c_0^{(k+1)}}$$

Die Einführung dieses Ausdrucks in (67) giebt die Formel

$$(67^*) \quad c_s^{(k+2)} = \frac{1}{c_0^{(k+1)}} \begin{vmatrix} c_0^{(k+1)} & c_0^{(k)} \\ c_{s+1}^{(k+1)} & c_{s+1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

durch deren wiederholte Anwendung man jeden Rest direct durch  $F(x)$ ,  $F_1(x)$  und ihre Coefficienten darstellen kann.

Zerlegt man nämlich in der Gleichung

$$c_s^{(k)} = \frac{1}{c_0^{(k-1)}} \begin{vmatrix} c_0^{(k-1)} & c_0^{(k-2)} \\ c_{s+1}^{(k-1)} & c_{s+1}^{(k-2)} \end{vmatrix}$$

die erste Verticalreihe nach (67\*), so zerfällt die Determinante in zwei Determinanten, welche sich zusammenziehen lassen zu

$$\frac{1}{c_0^{(k-2)}} \begin{vmatrix} c_0^{(k-2)} & c_0^{(k-3)} & () \\ c_1^{(k-2)} & c_1^{(k-3)} & c_0^{(k-2)} \\ c_{s+2}^{(k-2)} & c_{s+2}^{(k-3)} & c_{s+1}^{(k-2)} \end{vmatrix}$$

Zerlegt man ebenso die letzte Verticalreihe dieser Determinante, so findet man nach einigen Reductionen

$$c_s^{(k)} = \frac{1}{c_0^{(k-1)} \cdot c_0^{(k-2)}} \begin{vmatrix} c_0^{(k-2)} & c_0^{(k-3)} & c_0^{(k-4)} \\ c_1^{(k-2)} & c_1^{(k-3)} & c_1^{(k-4)} \\ c_{s+2}^{(k-2)} & c_{s+2}^{(k-3)} & c_{s+2}^{(k-4)} \end{vmatrix}$$

Allgemein zeigt man mit denselben Mitteln die Uebereinstimmung der folgenden Determinanten

$$\begin{vmatrix} c_0^{(k-h)} & c_0^{(k-h-1)} & \dots & c_0^{(k-2h)} \\ c_1^{(k-h)} & c_1^{(k-h-1)} & \dots & c_1^{(k-2h)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{h-1}^{(k-h)} & c_{h-1}^{(k-h-1)} & \dots & c_{h-1}^{(k-2h)} \\ c_{s+h}^{(k-h)} & c_{s+h}^{(k-h-1)} & \dots & c_{s+h}^{(k-2h)} \end{vmatrix}$$

und

$$\frac{1}{c_0^{(k-h-1)}} \begin{vmatrix} c_0^{(k-h-1)} & c_0^{(k-h-2)} & \dots & c_0^{(k-2h-2)} \\ c_1^{(k-h-1)} & c_1^{(k-h-2)} & \dots & c_1^{(k-2h-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_h^{(k-h-1)} & c_h^{(k-h-2)} & \dots & c_h^{(k-2h-2)} \\ c_{s+h+1}^{(k-h-1)} & c_{s+h+1}^{(k-h-2)} & \dots & c_{s+h+1}^{(k-2h-2)} \end{vmatrix}$$

Die wiederholte Anwendung dieser Transformation führt für  $k = 2n - 1$  zu dem Endresultate

$$c_0^{(2n-2)} \cdot c_0^{(2n-3)} \dots c_0^{(1)} \cdot c_s^{(2n-1)} =$$

$$\begin{vmatrix} c_0^{(1)} & c_0^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1^{(1)} & c_1^{(0)} & c_0^{(1)} & c_0^{(0)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2^{(1)} & c_2^{(0)} & c_1^{(1)} & c_1^{(0)} & c_0^{(0)} & c_0^{(0)} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2n-3}^{(1)} & c_{2n-3}^{(0)} & c_{2n-4}^{(1)} & c_{2n-4}^{(0)} & c_{2n-5}^{(1)} & c_{2n-5}^{(0)} & \dots & c_{n-2}^{(1)} \\ c_{s+2n-2}^{(1)} & c_{s+2n-2}^{(0)} & c_{s+2n-3}^{(1)} & c_{s+2n-3}^{(0)} & c_{s+2n-4}^{(1)} & c_{s+2n-4}^{(0)} & \dots & c_{s+n-1}^{(1)} \end{vmatrix}$$

Um hieraus die Function  $W_{2n-1}$  zu bilden, müssen wir die letzte Horizontalreihe mit  $x^s$  multipliciren und die für  $s = 0, 1, \dots, m - n$  sich ergebenden Ausdrücke summiren. Addiren wir danach zu der letzten Horizontalreihe noch die 1te, 2te, ...  $(2n-2)$ te, nachdem diese zuvor bez. mit  $\frac{1}{x^{2n-2}}, \frac{1}{x^{2n-3}}, \dots, \frac{1}{x}$  multiplicirt sind, so ergibt sich

$$W_{2n-1} = \frac{1}{c_0^{(2n-2)} \cdot c_0^{(2n-3)} \dots c_0^{(1)}} \cdot \frac{1}{x^{2(n-1)}} \cdot D_n$$

wenn  $D_n$  die Determinante darstellt

$$(69) \quad D_n = \begin{vmatrix} b_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & b_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_1 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-3} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-2} & a_{n-2} & \dots & a_1 & b_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2n-3} & a_{2n-3} & b_{2n-4} & a_{2n-4} & \dots & a_{n-1} & b_{n-2} \\ F_1(x) & F(x) & x.F_1(x) & x.F(x) & \dots & x^{n-2}.F(x) & x^{n-1}.F_1(x) \end{vmatrix}$$

Nun ist

$$F_n(x) = \frac{\alpha_{2n-5} \cdot \alpha_{2n-7} \dots}{\alpha_{2n-3} \cdot \alpha_{2n-1} \dots} W_{2n-1}$$

also mit Rücksicht auf (68)

$$(70) \quad F_n(x) = \frac{1}{\{c_0^{(2n-3)} \cdot c_0^{(2n-4)} \cdot c_0^{(2n-7)} \dots\}^2} \cdot \frac{1}{x^{2(n-1)}} \cdot D_n$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Zeichenreihen der durch die Determinanten  $D_n$  dargestellten Functionen den Zeichenreihen der Functionen  $F_n(x)$  äquivalent sind.

Die Determinante (70) stimmt mit (63) und (65) überein; denn die Determinante (70) erhält nur den Factor  $(-1)^{n(n-1)} = +1$ , wenn man die 1te, 3te, ...  $(2n-1)$ te Horizontalreihe nach einander bez. zur  $(2n-1)$ ten,  $(2n-2)$ ten, ...  $n$ ten macht.

#### Litteratur:

Dies Verfahren entwickelt Heilermann in seinen drei Aufsätzen:

1846 „Ueber die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche“ (Crelle Bd. 33. pag. 174).

1852 „Ueber die Reste, welche bei der Anwendung des Sturm'schen Satzes vorkommen“ (Crelle Bd. 43. pag. 43).

1854 „Independente Berechnung der Sturm'schen Reste“ (Crelle Bd. 48. pag. 190).

Vergl. noch Sylvester: „On a Theory of the Syzygetic relations“ art. 10.

#### § 16.

Es ist meine weitere Aufgabe zu zeigen, wie auch aus der Hermite-Jacobi'schen Betrachtungsweise die Gültigkeit des Sturm'schen Satzes für die Sturm'schen Functionen zweiter Gattung gefolgert

werden kann. Zu diesem Zwecke stelle ich zunächst kurz die Hauptpunkte dieser Methode zusammen.

Während alle Forscher vor Hermite Functionen aufzustellen suchten, welche die im § 1. unter 1), 2) und 3) entwickelten Eigenschaften besitzen, ging Hermite von dem Trägheitsgesetze der quadratischen Formen aus:

„Wenn man eine quadratische Form

$$f = \sum_{1,r}^n \sum_{1,r}^s A_{n,s} u_n u_s$$

von den  $r$  unabhängigen Variablen  $u_1, u_2, \dots u_r$ , in welcher die Coefficienten ( $A_{n,s} = A_{s,n}$ ) sämtlich reell sind, vermittelt einer reellen linearen Substitution

$$u_n = a_{n,1} v_1 + a_{n,2} v_2 + \dots + a_{n,r} v_r$$

in eine neue Form

$$f = \sum_{1,r}^n p_n v_n^2$$

transformirt, welche nur die Quadrate der Variablen enthält, so wird die Zahl der positiven und negativen Terme in der transformirten Form stets dieselbe sein, welche Substitution man auch gewählt haben mag.“ (Baltzer, Determinanten § 13, 15).

Zur Bestimmung dieser constanten Zahl führt am einfachsten die reelle lineare Substitution

$$u_n = v_n + a_{n+1,n} v_{n+1} + a_{n+2,n} v_{n+2} + \dots + a_{r,n} v_r$$

( $n = 1, 2, \dots r$ ), welcher die Coefficienten

$$p_n = \frac{m_{n,n}}{m_{n-1,n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots r)$$

entsprechen, wenn  $m_{n,n}$  die Determinante bezeichnet

$$(71) \quad m_{n,n} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}$$

Die transformirte Form  $f$  enthält also so viel positive und bez. so viel negative Glieder, als Zeichenfolgen und bez. Zeichenwechsel in der Reihe

$$(72) \quad m_{0,0} = 1, \quad m_{1,1} = A_{1,1}, \quad m_{2,2}, \quad m_{3,3}, \dots m_{r,r}$$

vorkommen.

Es seien nun wie früher von den Wurzeln der Gleichung  $F(x) = 0$   $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_m$  irgend welche Wiederholungen der unter einander verschiedenen Wurzeln  $x_1, x_2, \dots x_r$ . Bezeichnen wir ferner mit  $\varrho_1(x), \varrho_2(x), \dots \varrho_r(x)$  rationale Functionen von  $x$  mit reellen Coefficienten, mit  $a$  eine positive oder negative ganze ungrade Zahl, endlich mit  $\omega(x)$  und  $\pi(x)$  zwei Polynome mit reellen Coefficienten, welche für jeden reellen Wurzelwert von  $F(x) = 0$  im Vorzeichen übereinstimmen, so führt die Betrachtung der für die Sturm'schen Functionen „erzeugenden“ quadratischen Form

$$(73) \quad f = \sum_{1,r}^k (x - x_k)^a \cdot \frac{\omega(x_k)}{\pi(x_k)} \cdot U_k^2 = \sum_{1,r}^n \sum_{1,r}^s A_{n,s} u_n u_s$$

in der

$$U_k = u_1 \cdot \varrho_1(x_k) + u_2 \cdot \varrho_2(x_k) + \dots + u_r \cdot \varrho_r(x_k)$$

$$(74) \quad A_{n,s} = \sum_{1,r}^k (x - x_k)^a \cdot \frac{\omega(x_k)}{\pi(x_k)} \cdot \varrho_n(x_k) \cdot \varrho_s(x_k)$$

auf diesen Satz:

„Für einen reellen Wert  $h$  von  $x$  stimmt die Anzahl der Zeichenfolgen in der Zeichenreihe der Functionen (72) überein mit der Anzahl der verschiedenen complexen Wurzelpaare von  $F(x) = 0$ , vermehrt um die Anzahl der verschiedenen reellen Wurzeln, die kleiner als  $h$  sind.

Und die Anzahl der Zeichenwechsel ist gleich der Anzahl der verschiedenen complexen Wurzelpaare, vermehrt um die Anzahl der verschiedenen reellen Wurzeln, die grösser als  $h$  sind.

Sind daher  $h$  und  $k$  reelle Zahlen und  $k > h$ , so liegen zwischen  $x = h$  und  $x = k$  so viele verschiedene reelle Wurzeln von  $F(x) = 0$ , wie die Zeichenreihe von (72) für  $x = k$  weniger Zeichenwechsel enthält, als für  $x = h$ .

Vergl. Brioschi: „Sur les séries qui donnent le nombre des racines réelles des équations algébriques“ (Nouvelles Annales de Mathématiques T. 15. pag. 264).

## § 17.

Um hiernach aus den unendlich vielen Systemen von Functionen  $\pi_{n,n}$  (71), welche die Eigenschaften der Sturm'schen Functionen besitzen, die vorhin betrachteten Functionen abzuleiten, nehmen wir die folgenden Substitutionen vor.

$$1, r \ x_k^{n+s-1} \left( 1 - \frac{x}{x_k} \right) \quad \text{d.}$$

daher

$$(75) \qquad m_{n,n} = (-1)^n \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & & \\ u_2 & u_3 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & u_{n+1} & & \end{vmatrix}$$

d. h. nach (42) die Function  $m_{n,n}$  geht in die zweite Gattung  $\varphi_n(x)$  über.

II. <sup>1)</sup> Setzen wir dagegen

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{x^{n-1}}, \quad \pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) =$$

also

$$\begin{aligned} A_{n,s} &= \sum_{1,r}^k \frac{1}{x - x_k} \cdot \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} \cdot \frac{1}{x_k^{n+s-2}} \\ &= - \sum_{1,r}^k \frac{\varepsilon_k}{x_k^{n+s-1}} \cdot \frac{1}{\left( 1 - \frac{x}{x_k} \right)} \quad \text{d. i.} \end{aligned}$$

so ist

$$(76) \qquad m_{n,n} = (-1)^n \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & \dots & \\ U_2 & U_3 & \dots & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_n & U_{n+1} & \dots & \end{vmatrix}$$



**sehen Satzes für die Zähler der Näherungswerte des Sturm'schen Kettenbruchs zweiter Gattung selbst bewiesen werden. Wir legen die Gleichungen zu Grunde**

[illegible]

Es ist  $\sum_{1,r}^k \frac{x_k^r \cdot T(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = 0$  für jeden Wert von  $r$  und die Summe

$$\sum_{1,r}^k \frac{x_k^r \cdot T_1(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = \sum_{1,r}^k \frac{x_k^r}{T'(x_k)} = \begin{cases} 0 & \text{für } r = 0, 1, 2, \dots, r-2, \\ -1 & \text{für } r = -1, \end{cases}$$

**weil sie gleich dem mit negativem Zeichen genommenen Quotienten  
der beiden Determinanten**

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_r} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \frac{1}{x_1^{r-2}} & \frac{1}{x_2^{r-2}} & \dots & \frac{1}{x_r^{r-2}} \\ \hline \frac{1}{x_1^{r-2-r}} & \frac{1}{x_2^{r-2-r}} & \dots & \frac{1}{x_r^{r-2-r}} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_r} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \frac{1}{x_1^{r-1}} & \frac{1}{x_2^{r-1}} & \dots & \frac{1}{x_r^{r-1}} \\ \hline \frac{1}{x_1^{r-1-r}} & \frac{1}{x_2^{r-1-r}} & \dots & \frac{1}{x_r^{r-1-r}} \end{array}$$

**ist; daher findet man nach (3\*)**

$$\sum_{1, r}^k \frac{x_k^r \cdot T_2(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = \begin{cases} 0 & \text{für } r = 2, 3, \dots, r-1, \\ -\alpha_1 & \text{für } r = 1, \end{cases}$$

**und allgemein**

$$(77) \sum_{1, r}^k \frac{x_k^r \cdot T_i(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = \begin{cases} 0 & \text{für } r = 2(i-1), 2(i-1)+1, \dots, r-2+(i-1), \\ -\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1} & \text{für } r = 2(i-1)-1, \end{cases}$$

**oder**

$$(77^*) \quad \sum_{1, r}^k \frac{x_k^{r-i} \cdot x_k^{i-1-k} \cdot T_i(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = \begin{cases} 0 & \text{für } r = i, i+1, \dots, r-1, \\ -\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1} & \text{für } r = i-1. \end{cases}$$

**Diese Gleichung ist identisch mit (51\*), die aber auf ganz verschiedenem Wege gefunden wurde.**

**Bezeichnet man mit  $\gamma_0^{(r-1)}$  das constante Glied von  $T_r(x)$  und zur Abkürzung**

$$(78) \quad \sum_{1,r}^k \frac{x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot T_i(x_k) \cdot T_i(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = S_i$$

so erhält man mit Hülfe der Relationen (77\*) sofort die beiden Gleichungen

$$(79) \quad \sum_{1,r}^k \frac{x_k^{h-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot T_h(x_k) \cdot T_i(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = 0 \text{ für } (h-i)^2 > 0$$

und

$$S_i = -\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1} \cdot \gamma_0^{(r-i)}$$

Aus dem System (3\*) ersieht man aber, dass  $\gamma_0^{(r-1)} = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i}$ ; daher ist auch

$$(80) \quad S_i = -\frac{1}{\alpha_i}$$

Um diese wichtige Beziehung (80) herzuleiten, kann man auch <sup>3)</sup> in den Gleichungen

$$\begin{aligned} T_{i-1}(x_k) &= (\alpha_i + \beta_i x_k) \cdot T_i(x_k) - x_k^2 \cdot T_{i+1}(x_k) \\ T_i(x_k) &= (\alpha_{i+1} + \beta_{i+1} x_k) \cdot T_{i+1}(x_k) - x_k^2 \cdot T_{i+2}(x_k) \end{aligned}$$

auf beiden Seiten bez. mit  $x_k^{2(i-1)-1} \cdot T_{i+1}(x_k)$  und  $x_k^{2(i-1)-1} \cdot T_i(x_k)$  multipliciren und von  $k=1$  bis  $k=r$  summiren; man erhält mit Rücksicht auf (79)

$$(80) \quad \begin{aligned} S_{i+1} &= \alpha_i \cdot \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot T_i(x_k) \cdot T_{i+1}(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} \\ S_i &= \alpha_{i+1} \cdot \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot T_i(x_k) \cdot T_{i+1}(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} \end{aligned}$$

und daraus die gewünschte Relation

$$\alpha_{i+1} \cdot S_{i+1} = \alpha_i \cdot S_i = \dots = \alpha_1 \cdot S_1 = -1$$

denn es ist

$$S_1 = \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} = S_1 = -b_0 \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \frac{1}{b_0}$$

Multiplicirt man ferner die Gleichung

$$(3**) \quad T_{i-1}(x_k) = (\alpha_i + \beta_i x_k) \cdot T_i(x_k) - x_k^2 \cdot T_{i+1}(x_k)$$

auf beiden Seiten mit  $x_k^{2i-4} \cdot T_i(x_k)$  und summirt über  $k$  von 1 bis  $r$ , so erhält man

$$0 = \alpha_i \cdot \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot T_i(x_k) \cdot T_i(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} + \beta_i S_i$$

oder

$$(82) \quad \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot T_i(x_k) \cdot T_i(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = \frac{\beta_i}{\alpha_i \cdot \alpha_i}$$

Multipliziert man endlich beide Seiten von (3\*\*) mit  $x_k^{h+i-\frac{1}{2}} \cdot T_h(x_k)$  und summirt wieder von  $k = 1$  bis  $k = n$ , so wird

$$\alpha_i \cdot \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{h-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot T_h(x_k) \cdot T_i(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = 0$$

wenn  $(h-i)^2 > 1$ , also auch

$$(83) \quad \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{h-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{i-1-\frac{1}{2}} \cdot T_h(x_k) \cdot T_i(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} = 0 \quad (h-i)^2 > 1$$

Setzen wir nunmehr

$$\varrho_1(x) = \frac{1}{x_1}, \quad \varrho_2(x) = \frac{q_1}{x^2}, \quad \dots \quad \varrho_n(x) = \frac{q_1 q_{n-1}}{x^n}, \quad \dots \quad \varrho_r(x) = \frac{q_1 q_{r-1}}{x^r}$$

$$\pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x), \quad a = 1$$

so ist zunächst nach (10\*)

$$\varrho_n(x_k) = \frac{x_k^{n-2} \cdot T_n(x_k)}{T_1(x_k)}$$

und daher folgt aus (74)

$$A_{n,s} = x \cdot \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{n-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{s-1-\frac{1}{2}} \cdot T_n(x_k) \cdot T_s(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)} \\ - \sum_{1,r}^k \frac{x_k^{n-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{s-1-\frac{1}{2}} \cdot T_n(x_k) \cdot T_s(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)}$$

Hieraus ergibt sich

erstens für  $n = s$  nach (82) und (80)

$$A_{n,n} = x \frac{\beta_n}{\alpha_n \cdot \alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} = \frac{q_n}{\alpha_n^2}$$

zweitens für  $s = n+1$  nach (81) und (79)

$$A_{n,n+1} = A_{n+1,n} = x \frac{S_{n+1}}{\alpha_n} = - \frac{x}{\alpha_n \cdot \alpha_{n+1}}$$

drittens für Werte von  $n$  und  $s$ , die sich um mehr als die Einheit unterscheiden,

$$A_{n,s} = 0 \text{ nach (83) und (79)}$$

Führt man diese Werte in (71) ein, schafft die Nenner vor die Determinante und multiplicirt jede Horizontal- und jede Verticalreihe mit  $-1$ , so findet sich

$$(84) \quad m_{n,n} = \frac{1}{\alpha_1^2 \cdot \alpha_2^2 \dots \alpha_n^2} \begin{vmatrix} q_1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & q_2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & q_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_{n-1} & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & q_n \end{vmatrix}$$

$$\text{d. h. } m_{n,n} = \frac{q_1 q_n}{\alpha_1^2 \cdot \alpha_2^2 \dots \alpha_n^2}$$

Wählen wir noch  $x = 0$ , so reducirt sich  $q_n$  auf  $\alpha_n$ ,  $A_{n,n}$  auf  $\frac{1}{\alpha_n}$ , und  $A_{n,s}$  wird Null für  $(n-s)^2 > 0$ ; daher ist in diesem Falle einfach

$$m_{n,n} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

und diese Gleichung giebt wieder den Satz § 2.

IV.<sup>2</sup>) Setzt man in (73) und (74)  $a = 0$ , so enthält die transformirte quadratische Form  $f$  so viel negative und so viel positive Quadrate, wie die Gleichung  $F(x) = 0$  verschiedene Paare complex conjugirter Wurzeln besitzt.

Substituirt man gleichzeitig wie in III.

$$\varrho_n(x) = \frac{q_1 q_{n-1}}{x_n}, \quad \pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x)$$

so folgt

$$A_{n,s} = \sum_{1,r}^k \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{n-1-\frac{1}{2}} \cdot x_k^{s-1-\frac{1}{2}} \cdot T_n(x_k) \cdot T_s(x_k)}{T'(x_k) \cdot T_1(x_k)}$$

Daher ist jetzt

$$A_{n,n} = \frac{\beta_n}{\alpha_n \cdot \alpha_n}$$

$$A_{n,n+1} = A_{n+1,n} = \frac{S_{n+1}}{\alpha_n} = - \frac{1}{\alpha_n \cdot \alpha_{n+1}}$$

$$A_{n,s} = 0 \text{ für } (n-s)^2 > 1$$

also

$$(85) \quad m_{n,n} = \frac{1}{\alpha_1^2 \cdot \alpha_2^2 \dots \alpha_n^2} \begin{vmatrix} \beta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \beta_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \beta_n \end{vmatrix}$$

Durch dies Resultat ist abermals der Satz § 2. verificirt.

Ist endlich <sup>4)</sup>

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{x^{n+\lambda-1}}, \quad \pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x) \quad \text{und noch } a = 0$$

so wird

$$A_{n,s} = S_{n+s+2\lambda-2}$$

Es giebt also die Zahl der Zeichenwechsel wie der Zeichenfolgen in der Reihe der Determinanten

$$(86) \quad 1; \quad S_{2\lambda}; \quad \left| \begin{array}{cc} S_{2\lambda} & S_{2\lambda+1} \\ S_{2\lambda+1} & S_{2\lambda+2} \end{array} \right|; \quad \dots \quad \left| \begin{array}{cccc} S_{2\lambda} & S_{2\lambda+1} & \dots & S_{2\lambda+r-1} \\ S_{2\lambda+1} & S_{2\lambda+2} & \dots & S_{2\lambda+r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{2\lambda+r-1} & S_{2\lambda+r} & \dots & S_{2\lambda+2r-2} \end{array} \right|$$

die Anzahl der verschiedenen imaginären Wurzeln von  $F(x) = 0$  an. In (86) kann man für  $\lambda$  irgend eine ganze, positive oder negative, Zahl setzen und erhält danach unendlich viele äquivalente Zeichenreihen; speciell für  $\lambda = 0$  und  $\lambda = 1$  gelangt man zu den Reihen (38) und (39) zurück.

#### Litteratur:

- 1) Vergl. die im § 16. citirte Abhandlung Brioschi's.
- 2) Brioschi: „Sur les fonctions de Sturm.“ Comptes Rendus T. 68. pag. 1318. 1869.
- 3) Kronecker: „Sur le théorème de Sturm.“ Comptes Rendus T. 68. pag. 1078. 1869.
- 4) Jacobi (Crelle, Journal Bd. 53. pag. 281).

## II.

**Les trois sphères  
des Polyèdres réguliers étoilés.**

Par

**Georges Dostor,**

Professeur à la Faculté des sciences de l'Université catholique de Paris.

---

**§ I. Notice sur les Polyèdres réguliers étoilés.**

1. La découverte des premiers Polyèdres étoilés paraît due à Képler. Dans son *Harmonique du Monde*<sup>1</sup>, le grand astronome donne, à la page 52 du deuxième livre, la construction des deux dodécaèdres réguliers étoilés, qui ont des angles solides convexes. Les faces de ces deux polyèdres sont, pour l'un et pour l'autre, des pentagones réguliers étoilés; mais les angles solides, qui sont convexes dans les deux corps, sont pentaèdres dans le premier et trièdres dans le second de ces deux polyèdres étoilés.

Dans le même livre, à la page 54, Képler fournit, de chacun de ces corps constellés, un double dessin ombré, parfaitement exécuté: les deux polyèdres sont représentés chacun de face et de côté par rapport à l'un des pentagones étoilés, qui les terminent.

Il est probable que l'auteur des lois planétaires aurait été conduit immédiatement aux deux autres polyèdres réguliers étoilés, s'il avait eu l'idée de l'existence d'angles solides étoilés. On sait que ces

---

<sup>1</sup> *Harmonices mundi libri V. Lincii Austriae, MDCXIX; in-fol°.*







Cela posé, dans le tétraèdre  $IACO$ , projetons sur le plan de la face  $ACO$  l'ensemble des trois autres faces  $CIO$ ,  $AIO$  et  $ACI$ ; nous obtenons l'égalité

$$ACO = CIO \cdot \cos ACI + AIO \cdot \cos COAI + ACI \cdot \cos IACO,$$

ou, en ayant égard aux valeurs (1) et (2), et en observant que  $\cos IACO = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ ,

$$(3) \quad ACO = CIO \cdot \cos \frac{q\pi}{n} + AIO \cdot \cos \frac{p\pi}{m}$$

Mais nous avons

$$\text{le triangle } ACO = \frac{1}{2} OC \cdot AC = \frac{1}{2} r \cdot AC,$$

$$\text{le triangle } CIO = \frac{1}{2} OC \cdot CI = \frac{1}{2} r \cdot AC \cos \frac{q\pi}{n},$$

$$\text{et le triangle } AIO = \frac{1}{2} OI \cdot AI = \frac{1}{2} \rho \cdot AC \sin \frac{q\pi}{n}.$$

Il vient donc, en substituant dans (3) et en divisant le résultat par  $\frac{1}{2} AC$ ,

$$r = r \cos^2 \frac{q\pi}{n} + \rho \sin \frac{q\pi}{n} \cos \frac{p\pi}{m}.$$

Faisant passer  $r \cos^2 \frac{q\pi}{n}$  dans le premier membre, remplaçant  $1 - \cos^2 \frac{q\pi}{n}$  par  $\sin^2 \frac{q\pi}{n}$ , puis divisant par  $\sin \frac{q\pi}{n}$ , on obtient la relation

$$(I) \quad r \sin \frac{q\pi}{n} = \rho \cos \frac{p\pi}{m},$$

qui existe entre le rayon  $r$  de la sphère inscrite dans le polyèdre régulier et le rayon  $\rho$  de la sphère tangente aux arêtes du polyèdre.

4. Relation entre le rayon  $R$  de la sphère circonscrite et le rayon  $\rho$  de la sphère tangente aux arêtes. Le triangle  $AIO$  (Fig. 1) nous donne

$$OA^2 = \overline{OI}^2 + \overline{AI}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{AC}^2 \sin^2 \frac{q\pi}{n} = OI^2 + (\overline{AO}^2 - \overline{CO}^2) \sin^2 \frac{q\pi}{n},$$

ou

$$R^2 = \rho^2 + (R^2 - r^2) \sin^2 \frac{q\pi}{n}.$$

on en déduit

$$R^2 \cos^2 \frac{q\pi}{n} = \rho^2 - r^2 \sin^2 \frac{q\pi}{n}.$$



d'où nous tirons

$$\sin I = \frac{r}{\rho}.$$

Mais par la relation (I) nous avons

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\cos \frac{p\pi}{m}}{\sin \frac{q\pi}{n}};$$

donc il nous vient

$$(V) \quad \sin I = \frac{\cos \frac{p\pi}{m}}{\sin \frac{q\pi}{n}}.$$

Cette expression était aussi connue pour les polyèdres réguliers convexes, ou pour le cas de  $p = 1$  et  $q = 1$ .

Au moyen de cette formule (V) nous pouvons calculer les angles d'inclinaison des faces adjacentes dans les polyèdres réguliers étoilés comme dans les polyèdres réguliers convexes.

**8. Inclinaison des faces dans le tétraèdre régulier.** Dans ce polyèdre régulier convexe (Fig. 2), les faces sont triangulaires et les angles solides sont des trièdres. Nous avons donc

$$n = 3, \quad q = 1; \quad m = 3, \quad p = 1;$$

ce qui nous donne

$$\sin I = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2 \sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

et par suite

$$\cos I = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \tan I = \sqrt{2}.$$

Nous avons par conséquent

$$(a) \quad \sin 2I = \frac{2}{3} \sqrt{2}, \quad \cos 2I = \frac{1}{3}, \quad \tan 2I = 2 \sqrt{2}, \quad \sec 2I = 3,$$

et

$$2I = 70^\circ 31' 43'',6.$$

**9. Inclinaison des faces dans l'hexaèdre régulier.** Les faces de ce polyèdre régulier convexe (Fig. 3) sont des carrés et les angles solides sont des trièdres trirectangles. On posera donc dans la formule (V)

$$n = 4, \quad q = 1; \quad m = 3, \quad p = 1;$$

Remplaçant  $r \sin \frac{q\pi}{n}$  par sa valeur  $\varrho \cos \frac{p\pi}{m}$  tirée de (I), on obtient la relation demandée

$$R^2 \cos^2 \frac{q\pi}{n} = \varrho^2 - \varrho^2 \cos^2 \frac{p\pi}{m} = \varrho^2 \sin^2 \frac{p\pi}{m},$$

ou

$$(II) \quad R \cos \frac{q\pi}{n} = \varrho \sin \frac{p\pi}{m}.$$

5. **Relation entre le rayon  $r$  de la sphère inscrite et celui  $R$  de la sphère circonscrite.** Si nous divisons membre à membre les deux équations (II) et (I), nous trouvons la relation

$$\frac{R \cos \frac{q\pi}{n}}{r \sin \frac{q\pi}{n}} = \frac{\sin \frac{p\pi}{m}}{\cos \frac{p\pi}{m}},$$

qui se réduit à

$$(III) \quad \frac{R}{r} = \operatorname{tang} \frac{p\pi}{m} \operatorname{tang} \frac{q\pi}{n}.$$

Cette relation était connue pour les polyèdres réguliers convexes, c'est-à-dire pour le cas où  $p = 1$  et  $q = 1$ .

6. **Relation entre les rayons  $R$ ,  $r$  et  $\varrho$  des trois sphères.** Faisons le produit des deux égalités (I) et (II), nous obtenons la relation

$$Rr \sin \frac{q\pi}{n} \cos \frac{q\pi}{n} = \varrho^2 \sin \frac{p\pi}{m} \cos \frac{p\pi}{m},$$

qui prend la forme remarquable

$$(IV) \quad Rr \sin \frac{2q\pi}{n} = \varrho^2 \sin \frac{2p\pi}{m}.$$

### § III. Inclinaison mutuelle des faces adjacentes dans les polyèdres réguliers étoilés.

7. Nous désignerons par  $2I$  l'angle plan qui mesure cette inclinaison. L'angle  $2I$  est évidemment double de l'angle plan  $OIC$  (Fig. 1).

Pour trouver la valeur de  $I$ , nous ferons remarquer que le triangle rectangle  $OCI$  nous donne

$$OC = OI \sin OIC,$$

ou

$$(4) \quad r = \varrho \sin I;$$

il vient

$$4 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{10} = \frac{1}{4} \sqrt{100 - 20} = \frac{1}{4} \sqrt{80} = \sqrt{5}.$$

Donc on a

$$(5) \quad \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{10}}{\sqrt{5}}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{5}}{\sqrt{5}}.$$

En second lieu, comme

$$2 \sin \frac{\pi}{10} = 2 \sin 18^\circ = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1),$$

$$2 \cos \frac{\pi}{5} = 2 \cos 36^\circ = \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1),$$

on a

$$4 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5} = 1.$$

Donc il vient aussi

$$(6) \quad \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{10}} = 2 \cos \frac{\pi}{5}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{5}} = 2 \sin \frac{\pi}{10}.$$

**12. Inclinaison des faces dans le dodécaèdre régulier convexe.**  
 Dans ce polyèdre régulier (Fig. 5), les faces sont des pentagones réguliers convexes et les angles solides sont des trièdres; par suite on a

$$n = 5, \quad q = 1; \quad m = 3, \quad p = 1,$$

ce qui transforme la formule (V) dans la suivante, en égard à l'identité (5),

$$\sin I = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{10}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

On en déduit, en tenant compte de (5) et de (6),

$$\cos I = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \frac{2 \sin 36^\circ}{\sqrt{5}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{5}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{10}},$$

$$\text{tang } I = \frac{\cos \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{10}} = 2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1);$$

ce qui nous donne

$$\sin I = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2 \sin 45^\circ} = \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

et par suite

$$\cos I = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad \tan I = 1.$$

Il nous vient par conséquent

$$(b) \quad \sin 2I = 1, \quad \cos 2I = 0, \quad \tan 2I = \infty,$$

et

$$2I = 90^\circ.$$

10. **Inclinaison des faces dans l'octaèdre régulier.** Dans ce corps régulier (Fig. 4) les faces sont triangulaires et les angles solides sont tétraèdres. On fera donc dans (V)

$$n = 3, \quad q = 1; \quad m = 4, \quad p = 1;$$

ce qui nous donne

$$\sin I = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2 \cos 45^\circ}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

et par suite

$$\cos I = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan I = 2.$$

Il nous vient par conséquent

$$(c) \quad \sin 2I = \frac{2}{3} \sqrt{2}, \quad \cos 2I = -\frac{1}{3}, \quad \tan 2I = -2\sqrt{2}, \quad \sec 2I = -3,$$

et

$$I = 109^\circ 28' 16'',4.$$

Si nous comparons les valeurs (a) et (c), nous verrons que

Les inclinaisons des faces dans l'octaèdre régulier sont les suppléments des inclinaisons des faces dans le tétraèdre régulier.

11. **Identités utiles dans l'évaluation des éléments des polyèdres réguliers, qui sont terminés par des faces pentagonales, convexes ou étoilés, ou par des sommets pentaèdres convexes ou étoilés.** Puisque

$$2 \sin \frac{\pi}{5} = 2 \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$2 \cos \frac{\pi}{10} = 2 \cos 18^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

Cette valeur de  $\sin I$  est la même que celle qui se rapporte au dodécaèdre régulier convexe (n° 12). Nous en concluons que

Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à faces pentagonales étoilées et à sommets pentaèdres convexes, l'inclinaison des faces est la même que dans le dodécaèdre régulier convexe.

**15. Inclinaison des faces dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à faces pentagonales étoilées et à sommets trièdres.** Pour ce polyèdre étoilé (Fig 8) on a

$$n = 5, \quad q = 2; \quad m = 3, \quad p = 1.$$

On trouve donc, par la formule (V), que

$$\sin I = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{2\pi}{5}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2 \sin 36^\circ}{\sqrt{5}},$$

ou

$$\sin I = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

Le sinus de cette demi-inclinaison est par suite égal au cosinus de la demi-inclinaison du polyèdre étoilé précédent. Les demi-inclinaison des deux polyèdres sont ainsi complémentaires. Donc

Dans les deux polyèdres réguliers étoilés de Képler, les inclinaisons des faces sont supplémentaires l'une de l'autre.

Cette inclinaison est par conséquent

$$2I = 63^\circ 26' 5'',8.$$

**16. Inclinaison des faces dans le dodécaèdre étoilé de Poinso.** Dans ce polyèdre régulier (Fig. 9), les faces sont des pentagones convexes et les angles solides sont des angles pentaèdres étoilés. Par suite on devra poser dans (V)

$$n = 5, \quad q = 1; \quad m = 5, \quad p = 2,$$

ce qui donne

$$\sin I = \frac{\cos \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{5}}{\sqrt{5}}.$$

L'inclinaison des faces dans ce polyèdre est ainsi égale à celle du polyèdre précédent. Donc

Les faces ont même inclinaison dans le dodécaèdre régulier étoilé de Poincot que dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets trièdres.

17. Inclinaison des faces dans l'icosaèdre régulier étoilé de Poincot. Dans ce corps régulier (Fig. 10), les faces sont triangulaires et les angles solides sont des angles pentaèdres étoilés. Il suffira donc de faire, dans la formule (V),

$$n = 3, \quad q = 1; \quad m = 5, \quad p = 2.$$

On trouve ainsi que

$$\sin I = \frac{\cos \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sin \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{10}}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2 \sin 18^\circ}{2 \sin 60^\circ},$$

ou

$$\sin I = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{6}(\sqrt{15}-\sqrt{3}).$$

Si nous comparons cette valeur à l'expression de  $\cos I$ , dans l'icosaèdre régulier convexe (n° 13), nous voyons qu'elles sont égales; les valeurs de  $I$  sont par suite complémentaires dans les deux corps et celles de  $2I$  sont supplémentaires. Donc

Dans les deux icosaèdres réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé, les inclinaisons des faces sont supplémentaires l'une de l'autre.

L'inclinaison des faces dans l'icosaèdre régulier étoilé de Poincot est par conséquent

$$2I = 41^\circ 48' 37'',25.$$

#### § IV. Relations numériques entre les rayons des trois sphères dans les divers polyèdres réguliers.

18. Relations numériques entre le rayon de la sphère inscrite et celui de la sphère tangente aux arêtes. Pour les calculer, il nous suffira de faire usage de la formule (4),  $r = \rho \sin I$ . En y remplaçant  $\sin I$  successivement par les valeurs trouvées de n° 8 à n° 17, nous obtenons les expressions suivantes:

$$\begin{array}{ll} \text{Tétraèdre régulier} & r = \frac{1}{3}\rho\sqrt{3}, \quad \rho = r\sqrt{3}. \\ \text{Hexaèdre régulier} & r = \frac{1}{2}\rho\sqrt{2}, \quad \rho = r\sqrt{2}. \end{array}$$



Octaèdre régulier . . .  $r = \frac{1}{2} \varrho \sqrt{6}$ ,  $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{6}$ .

Dodécaèdre régulier con-

vexe . . . . .  $r = \frac{1}{2} \varrho \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$ ,  $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{10-2\sqrt{5}}$ .

Icosaèdre régulier con-

vexe . . . . .  $r = \frac{1}{6} \varrho \sqrt{3(\sqrt{5}+1)}$ ,  $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{3(\sqrt{5}-1)}$ .

Dodécaèdre régulier étoilé

de Képler à sommets

pentaèdres . . . . .  $r = \frac{1}{2} \varrho \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$ ,  $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{10-2\sqrt{5}}$ .

Dodécaèdre régulier étoilé

de Képler à sommets

trièdres . . . . .  $r = \frac{1}{2} \varrho \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$ ,  $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{10+2\sqrt{5}}$ .

Dodécaèdre régulier étoilé

de Poincot . . . . .  $r = \frac{1}{2} \varrho \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$ ,  $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{10+2\sqrt{5}}$ .

Icosaèdre régulier étoilé

de Poincot . . . . .  $r = \frac{1}{6} \varrho \sqrt{3(\sqrt{5}-1)}$ ,  $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{3(\sqrt{5}+1)}$ .

Nous voyons par ce tableau que

1°. Dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est égal au côté du triangle équilatéral, qui se trouve inscrit dans un grand cercle de la sphère inscrite.

2°. Dans l'hexaèdre régulier, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est le côté du carré inscrit dans un grand cercle de la sphère inscrite.

3°. Dans le dodécaèdre régulier convexe et le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est égal au côté du pentagone régulier convexe, qui est inscrit dans un grand cercle de la sphère inscrite: car on a

$$\frac{1}{2} r \sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2r \sin \frac{\pi}{5}.$$

4°. Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler à sommets trièdres, et le dodécaèdre régulier étoilé de Poincot, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est le côté du pentagone régulier étoilé, qui se trouve

inscrit dans un grand cercle de la sphère inscrite: car on a  
 $\frac{1}{2}r\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 2r\sin\frac{2\pi}{5}.$

20. Nos valeurs démontrent en outre que

1°. Si le dodécaèdre régulier convexe ainsi que le dodécaèdre régulier étoilé, à sommets pentaèdres convexes sont circonscrits à une même sphère, les arêtes de ces deux polyèdres sont aussi tangentes à une même sphère.

2°. De même, si le dodécaèdre régulier étoilé à sommets trièdres et le dodécaèdre régulier étoilé à faces convexes sont circonscrits à une même sphère, leurs arêtes sont aussi tangentes à une même sphère.

21. Si nous représentons par  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$  les rayons des sphères, qui sont tangentes aux arêtes des tétraèdre, hexaèdre et octaèdre réguliers, circonscrits à une même sphère de rayon  $r$ , on aura

$$\varrho_1:\varrho_2 = \varrho_3:r.$$

22. Relations numériques entre le rayon de la sphère circonscrite et celui de la sphère tangente aux arêtes. Nous ferons usage, pour le calcul de ces relations, de la formule (II) ou  $R\cos\frac{q\pi}{n} = \varrho\sin\frac{p\pi}{m}.$  Elle nous fournit les valeurs suivantes:

Tétraèdre régulier . .	$R = \varrho\sqrt{3},$	$\varrho = \frac{1}{3}R\sqrt{3}.$
Hexaèdre régulier . .	$R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{6},$	$\varrho = \frac{1}{3}R\sqrt{6}.$
Octaèdre régulier . .	$R = \varrho\sqrt{2},$	$\varrho = \frac{1}{2}R\sqrt{2}.$
Dodécaèdre régulier		
convexe . . . . .	$R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{3}(\sqrt{5}-1),$	$\varrho = \frac{1}{6}R\sqrt{3}(\sqrt{5}+1).$
Icosaèdre régulier		
convexe . . . . .	$R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{10-2\sqrt{5}},$	$\varrho = \frac{1}{2}R\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$
Dodécaèdre régulier		
étoilé de Képler,		
à sommets pentaèdres	$R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{10+2\sqrt{5}},$	$\varrho = \frac{1}{2}R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$
Dodécaèdre régulier		
étoilé de Képler,		
à sommets trièdres .	$R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{3}(\sqrt{5}+1),$	$\varrho = \frac{1}{6}R\sqrt{3}(\sqrt{5}-1).$



Dodécaèdre régulier

$$\text{convexe} \dots \dots R = r\sqrt{15-6\sqrt{5}}, \quad r = \frac{1}{3}R\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}.$$

Icosaèdre régulier

$$\text{convexe} \dots \dots R = r\sqrt{15-6\sqrt{5}}, \quad r = \frac{1}{3}R\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}.$$

Dodécaèdre régulier

étoilé de Képler,

$$\text{à sommets pentaèdres } R = r\sqrt{5}, \quad r = \frac{1}{3}R\sqrt{5}.$$

Dodécaèdre régulier

étoilé de Képler,

$$\text{à sommets trièdres } R = r\sqrt{15+6\sqrt{5}}, \quad r = \frac{1}{3}R\sqrt{\frac{15-6\sqrt{5}}{5}}.$$

Dodécaèdre régulier

étoilé de Poincot . .  $R = r\sqrt{5},$

$$r = \frac{1}{3}R\sqrt{5}.$$

Icosaèdre régulier

$$\text{étoilé de Poincot } R = r\sqrt{15+6\sqrt{5}}, \quad r = \frac{1}{3}R\sqrt{\frac{15-6\sqrt{5}}{5}}.$$

26. La comparaison de ces valeurs fait voir que:

1°. Dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère circonscrite est triple du rayon de la sphère inscrite.

2°. Dans l'hexaèdre et l'octaèdre réguliers, le rayon de la sphère circonscrite est égal au côté du triangle équilatéral, qui se trouve inscrit dans un grand cercle de la sphère inscrite.

3°. Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres et dans le dodécaèdre régulier étoilé de Poincot, le rayon de la sphère circonscrite est égal au rayon de la sphère inscrite multiplié par  $\sqrt{5}$ .

27. Les mêmes valeurs prouvent encore que

1°. Si l'hexaèdre et l'octaèdre réguliers sont inscrits dans une même sphère, ils seront aussi circonscrits à une même sphère.

2°. Si le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers convexes sont inscrits dans une même sphère, ils seront aussi circonscrits à une même sphère.



4°. Dans le dodécaèdre régulier convexe et dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets trièdres, les rayons des trois sphères forment entre eux la relation  $R^2 = 12\rho^2 - 15r^2$ .

5°. Dans les deux icosaèdres réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé, les rayons des trois sphères forment entre eux la relation  $R^2 = 4\rho^2 - 3r^2$ .

6°. Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère circonscrite et la demi-différence entre ce rayon et celui de la sphère inscrite.

7°. Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Poincot, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère circonscrite et la demi-somme de ce rayon et de celui de la sphère inscrite.

**§ V. Expressions générales des rayons  
des trois sphères en valeur de l'arête des polyèdres réguliers étoilés.**

33. Expression du rayon  $r$  de la sphère inscrite dans un polyèdre régulier, en valeur de l'arête  $a$  de ce polyèdre. Les triangle rectangle  $OCI$  (Fig. 1) nous fournit la valeur

$$r = OC = CI \tan OIC = CI \tan I;$$

mais nous avons, par le triangle rectangle  $ACI$ ,

$$AC = AI \cot ACI = \frac{a}{2} \cot \frac{q\pi}{n}.$$

Il nous viendra donc, en substituant,

$$(VI) \quad 2r = a \cot \frac{q\pi}{n} \tan I.$$

34. Expression du rayon  $R$  de la sphère circonscrite à un polyèdre régulier, en valeur de l'arête  $a$  de ce polyèdre. Multiplions la relation précédente (VI) par la relation (III) du n°. 5; nous aurons de suite

$$2R = a \tan \frac{p\pi}{m} \tan \frac{q\pi}{n} \cot \frac{q\pi}{n} \tan I;$$

mais

$$\tan \frac{q\pi}{n} \cot \frac{q\pi}{n} = 1;$$

donc nous aurons

$$(VII) \quad 2R = a \operatorname{tang} \frac{p\pi}{m} \operatorname{tang} I.$$

35. Expression du rayon  $\rho$  de la sphère tangente aux arêtes d'un polyèdre régulier, en valeur de l'arête  $a$  de ce polyèdre. Dans la formule (VI) remplaçons  $r$  par sa valeur  $\rho \frac{\cos \frac{p\pi}{m}}{\sin \frac{q\pi}{n}}$  fournie par l'égalité (I); elle deviendra

$$2\rho \frac{\cos \frac{p\pi}{m}}{\sin \frac{q\pi}{n}} = a \cot \frac{q\pi}{n} \operatorname{tang} I,$$

ou, en multipliant les deux membres par  $\sin \frac{q\pi}{n}$  et en divisant par  $\cos \frac{p\pi}{m}$ ,

$$(VIII) \quad 2\rho = a \frac{\cos \frac{q\pi}{n}}{\cos \frac{p\pi}{m}} \operatorname{tang} I.$$

36. Nous pouvons trouver une expression plus simple de la valeur de  $2\rho$ . Multiplions, en effet, l'égalité précédente, membre à membre, par la relation (V); elle deviendra

$$2\rho \sin I = a \frac{\cos \frac{q\pi}{n}}{\cos \frac{p\pi}{m}} \operatorname{tang} I \cdot \frac{\cos \frac{p\pi}{m}}{\sin \frac{q\pi}{n}},$$

ou, en réduisant,

$$(IX) \quad 2\rho = a \frac{\cot \frac{q\pi}{n}}{\cos I} = a \cot \frac{q\pi}{n} \sec I.$$

#### § VI. Valeurs numériques des rayons des trois sphères en fonction de l'arête des divers polyèdres réguliers.

37. Valeurs numériques du rayon  $\rho$  de la sphère tangente aux arêtes, en fonction de l'une  $a$  de ces arêtes. Pour plus de simplicité, au lieu de nous servir de la formule (IX), nous ferons usage de la relation (Fig. 1)

$$A\bar{O}^2 - O\bar{I}^2 = A\bar{I}^2,$$

ou

$$4R^2 - 4\rho^2 = a^2,$$

que nous fournit le triangle rectangle  $AIO$ .

Si nous remplaçons, dans cette égalité,  $4R^2$  par ses valeurs successives en fonction de  $\rho$ , qui se trouvent au n°. 22, nous obtiendrons les expressions suivantes:

Tétraèdre régulier . . . . .	$\rho = \frac{1}{4}a\sqrt{2},$	$a = 2\rho\sqrt{2}.$
Hexaèdre régulier . . . . .	$\rho = \frac{1}{2}a\sqrt{2},$	$a = \rho\sqrt{2}.$
Octaèdre régulier . . . . .	$\rho = \frac{1}{2}a,$	$a = 2\rho.$
Dodécaèdre régulier convexe .	$\rho = \frac{1}{8}a(\sqrt{5}+1)^2,$	$a = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{5}-1)^2.$
Icosaèdre régulier convexe .	$\rho = \frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1),$	$a = \rho(\sqrt{5}-1).$
Dodécaèdre régulier étoilé de		
Képler, à sommets pentaèdres	$\rho = \frac{1}{4}a(\sqrt{5}-1),$	$a = \rho(\sqrt{5}+1).$
Dodécaèdre régulier étoilé de		
Képler, à sommets trièdres .	$\rho = \frac{1}{8}a(\sqrt{5}-1)^2,$	$a = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{5}+1)^2.$
Dodécaèdre régulier étoilé de		
Poinsot . . . . .	$\rho = \frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1),$	$a = \rho(\sqrt{5}-1).$
Icosaèdre régulier étoilé de		
Poinsot . . . . .	$\rho = \frac{1}{4}a(\sqrt{5}-1),$	$a = \rho(\sqrt{5}+1).$

38. Nous voyons par ces valeurs que:

1°. Lorsque le tétraèdre et l'hexaèdre réguliers ont même arête; les rayons des deux sphères tangentes aux arêtes sont le second double du premier.

2°. Lorsque l'icosaèdre régulier convexe et le dodécaèdre régulier étoilé de Poinsot ont même centre et même arête, leurs arêtes sont tangentes à une même sphère, dont le diamètre est égal au côté du dodécagone régulier étoilé, qui se trouve inscrit dans le cercle ayant l'arête commune pour rayon.

3°. Lorsque le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, et l'icosaèdre régulier étoilé de Poinsot ont même centre et même arête, leurs arêtes sont aussi tangentes à une même sphère, dont le diamètre est égal au côté du décagone régulier convexe, qui se trouve inscrit dans le cercle ayant l'arête commune pour rayon.

4°. Lorsque l'icosaèdre régulier convexe et le dodé-





40. La comparaison de ces expressions prouve que:

1°. Si tous les polyèdres réguliers étoilés sont inscrits dans une même sphère, le rapport des arêtes est dans les trois premiers polyèdres réguliers

$$\frac{a_1}{2\sqrt{6}} = \frac{a_2}{2\sqrt{3}} = \frac{a_3}{3\sqrt{2}};$$

et les arêtes des six autres polyèdres réguliers sont dans les rapports

$$\frac{a_4\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1} = \frac{a_5\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} = \frac{a_6\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)} = \frac{a_7\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1} =$$

$$\frac{a_8\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} = \frac{a_9\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}.$$

2°. L'icosaèdre régulier convexe et le dodécaèdre régulier étoilé de Poincot ont même arête, lorsqu'ils sont inscrits dans la même sphère.

3°. Le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, et l'icosaèdre régulier étoilé de Poincot ont aussi même arête, lorsqu'ils sont inscrits dans une même sphère.

4°. Lorsque le dodécaèdre régulier convexe et le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets trièdres, sont inscrits dans la même sphère, leurs arêtes sont entre elles comme les côtés des deux décagones réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé, qui sont inscrits dans un même cercle.

41. Valeurs numériques du rayon  $r$  de la sphère inscrite dans les polyèdres réguliers, en fonction de l'une  $a$  des arêtes de ces polyèdres. Multiplions en croix et respectivement les relations du n° 39 par les égalités du n° 25. Nous obtiendrons les relations suivantes:

$$\text{Tétraèdre régulier} \quad . \quad . \quad r = \frac{1}{12}a\sqrt{6}, \quad a = 2r\sqrt{6}.$$

$$\text{Hexaèdre régulier} \quad . \quad . \quad r = \frac{1}{2}a, \quad a = 2r.$$

$$\text{Octaèdre régulier} \quad . \quad . \quad r = \frac{1}{6}a\sqrt{6}, \quad a = r\sqrt{6}.$$

Dodécaèdre régulier

$$\text{convexe} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad r = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}, \quad a = r\sqrt{50-22\sqrt{5}}.$$

Icosaèdre régulier

convexe . . . . .  $r = \frac{1}{12}a(3\sqrt{3} + \sqrt{15}), \quad a = r(3\sqrt{3} - \sqrt{15}).$

Dodécaèdre régulier

étoilé de Képler,

à sommets pentaèdres  $r = \frac{1}{4}a \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}, \quad a = r\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$

Dodécaèdre régulier

étoilé de Képler,

à sommets trièdres  $r = \frac{1}{2}a \sqrt{\frac{25 - 11\sqrt{5}}{10}}, \quad a = r\sqrt{50 + 22\sqrt{5}}.$

Dodécaèdre régulier

étoilé de Poinsoot . .  $r = \frac{1}{4}a \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}, \quad a = r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$

Icosaèdre régulier

étoilé de Poinsoot . .  $r = \frac{1}{12}a(3\sqrt{3} - \sqrt{15}), \quad a = r(3\sqrt{3} + \sqrt{15}).$

42. Si l'on compare toutes ces expressions, on verra que

1<sup>o</sup>. Si le tétraèdre et l'octaèdre réguliers sont circonscrits à une même sphère, l'arête du tétraèdre sera double de celle de l'octaèdre.

2<sup>o</sup>. Lorsque les deux icosaèdres réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé, se trouvent circonscrits à une même sphère, la somme de leurs deux arêtes est égal à six fois le côté du triangle équilatéral inscrit dans un grand cercle de cette sphère.

3<sup>o</sup>. Lorsque le dodécaèdre régulier convexe et son conjugué, l'icosaèdre régulier convexe, sont circonscrits à une même sphère, leurs arêtes sont entre elles comme les côtés des décagone et pentagone réguliers convexes, inscrits dans un même cercle et multipliés respectivement par  $\sqrt{5}$  et  $\sqrt{3}$ .

4<sup>o</sup>. Lorsque le dodécaèdre régulier étoilé, à faces pentagonales étoilés et à sommets pentaèdres convexes, et son conjugué, le dodécaèdre régulier étoilé, à faces pentagonales convexes et à sommets pentaèdres étoilés se trouvent circonscrits à une même sphère, leurs arêtes sont entre elles comme les côtés des deux pentagones réguliers, l'un étoilé et l'autre convexe, qui sont inscrits dans le même cercle.



## III.

**Inscription dans le cercle des polygones  
réguliers de 15, 30, 60, 120, etc. côtés.  
Calcul des Côtés.**

Par

**Georges Dostor,**

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Paris.

---

La méthode, dont nous faisons usage, repose sur la Trigonométrie la plus élémentaire; elle suppose connu que la règle, qui sert à calculer le sinus de la somme et de la différence de deux arcs.

1. **Inscription dans le cercle des quatre polygones réguliers de quinze côtés.** Il existe quatre pentédécagons réguliers, dont les trois étoilés sont des espèces 2, 4 et 7.

Les demi-angles au centre de ces quatre polygones réguliers de 15 côtés sont respectivement

$$(1) \quad \frac{\pi}{15}, \quad \frac{2\pi}{15}, \quad \frac{4\pi}{15}, \quad \frac{7\pi}{15};$$

par conséquent, si  $R$  est le rayon du cercle circonscrit, les côtés seront

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{15,1} = 2R \sin \frac{\pi}{15}, \\ C_{15,2} = 2R \sin \frac{2\pi}{15}, \\ C_{15,4} = 2R \sin \frac{4\pi}{15}, \\ C_{15,7} = 2R \sin \frac{7\pi}{15}. \end{array} \right.$$

Les sinus des quatre arcs (1) se calculeront aisément au moyen de sinus et cosinus d'arcs plus simples, qui sont déjà connus.

Ajoutons d'abord le premier et le troisième de nos arcs (1), puis retranchons, l'un de l'autre, les mêmes arcs; nous obtenons les deux identités

$$\frac{4\pi}{15} + \frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{4\pi}{15} - \frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{5},$$

qui nous donnent de suite

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{4\pi}{15} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{10}, \\ \frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}. \end{array} \right.$$

De même, faisons d'abord la somme, puis la différence du second et du quatrième des arcs (1); nous aurons les égalités

$$\frac{7\pi}{15} + \frac{2\pi}{15} = \frac{3\pi}{5}, \quad \frac{7\pi}{15} - \frac{2\pi}{15} = \frac{\pi}{3},$$

d'où nous tirons de suite

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{7\pi}{15} = \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{6}, \\ \frac{2\pi}{15} = \frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{6}. \end{array} \right.$$

Il nous suffira actuellement de mettre ces équivalents (3) et (4) dans les formules (2), pour obtenir les expressions

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{15,1} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}\right) = 2R \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{10} - 2R \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{10}, \\ C_{15,2} = 2R \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{6}\right) = 2R \sin \frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi}{6} - 2R \cos \frac{3\pi}{10} \sin \frac{\pi}{6}, \\ C_{15,4} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{10}\right) = 2R \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{10} + 2R \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{10}, \\ C_{15,7} = 2R \sin\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{6}\right) = 2R \sin \frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi}{6} + 2R \cos \frac{3\pi}{10} \sin \frac{\pi}{6}. \end{array} \right.$$

Mais on sait que



Les demi-angles au centre de ces quatre polygones réguliers de 30 côtés sont respectivement

$$(7) \quad \frac{\pi}{30}, \quad \frac{7\pi}{30}, \quad \frac{11\pi}{30}, \quad \frac{13\pi}{30};$$

par suite les côtés seront

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{30,1} = 2R \sin \frac{\pi}{30}, \\ C_{30,7} = 2R \sin \frac{7\pi}{30}, \\ C_{30,11} = 2R \sin \frac{11\pi}{30}, \\ C_{30,13} = 2R \sin \frac{13\pi}{30}. \end{array} \right.$$

Les sinus des quatre arcs pourront s'obtenir en valeur de sinus d'arcs plus simples, sinus dont nous connaissons déjà la valeur.

Ajoutons d'abord le premier et le troisième de nos arcs (7), puis prenons la différence entre les mêmes arcs; nous aurons les deux identités

$$\frac{11\pi}{30} + \frac{\pi}{30} = \frac{2\pi}{5}, \quad \frac{11\pi}{30} - \frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{3};$$

d'où nous tirons de suite

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{11\pi}{30} = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{6}, \\ \frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}. \end{array} \right.$$

Si nous prenons de même la somme et la différence du deuxième et du quatrième de nos mêmes arcs (7), nous aurons les égalités

$$\frac{13\pi}{30} + \frac{7\pi}{30} = \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{13\pi}{30} - \frac{7\pi}{30} = \frac{\pi}{5};$$

qui nous donnent de suite

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{13\pi}{30} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{10}, \\ \frac{7\pi}{30} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10}. \end{array} \right.$$

Mettons ces sommes et ces différences (9) et (10) dans les formules (8); nous obtiendrons les expressions



$$C_{30,1} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right) = 2R \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{6} - 2R \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{6},$$

$$C_{30,7} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10}\right) = 2R \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{10} - 2R \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{10},$$

$$C_{30,11} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{6}\right) = 2R \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{6} + 2R \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{6},$$

$$C_{30,13} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{10}\right) = 2R \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{10} + 2R \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{10}.$$

Substituons aux facteurs trigonométriques des seconds membres leurs valeurs numériques

$$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\sin \frac{\pi}{5} = \cos \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad \cos \frac{\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1);$$

$$\sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1), \quad \cos \frac{\pi}{10} = \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

nous trouverons pour les côtés des quatre polygones réguliers de 30 côtés les valeurs

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{30,1} = \frac{1}{4}R(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1), \\ C_{30,7} = \frac{1}{4}R(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1), \\ C_{30,11} = \frac{1}{4}R(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1), \\ C_{30,13} = \frac{1}{4}R(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1). \end{array} \right.$$

4. La comparaison de ces expressions nous fournit les deux relations

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{30,11} - C_{30,1} = \frac{1}{2}R(\sqrt{5}+1), \\ C_{30,13} - C_{30,7} = \frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1); \end{array} \right.$$

qui prouvent que

1°. La différence entre les côtés des polygones réguliers de 30 côtés, des espèces 11 et 1, inscrits dans le même cercle, est égale au côté du décagone régulier étoilé, inscrit dans ce cercle.

2°. La différence entre les côtés des polygones réguliers de 30 côtés, des espèces 13 et 7, inscrits dans le même cercle, est égale au côté du décagone régulier convexe, inscrit dans ce cercle.

5. Inscription dans le cercle des huit polygones réguliers de 60 côtés. Ces huit polygones réguliers sont des espèces

$$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.$$

Les demi-angles au centre de ces polygones seront ainsi

$$(11) \quad \frac{\pi}{60}, \frac{7\pi}{60}, \frac{11\pi}{60}, \frac{13\pi}{60}, \frac{17\pi}{60}, \frac{19\pi}{60}, \frac{23\pi}{60}, \frac{29\pi}{60},$$

de sorte qu'on aura, pour les côtés, les expressions

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} C_{60,1} = 2R \sin \frac{\pi}{60}, & C_{60,29} = 2R \sin \frac{29\pi}{60}, \\ C_{60,7} = 2R \sin \frac{7\pi}{60}, & C_{60,23} = 2R \sin \frac{23\pi}{60}, \\ C_{60,11} = 2R \sin \frac{11\pi}{60}, & C_{60,19} = 2R \sin \frac{19\pi}{60}, \\ C_{60,13} = 2R \sin \frac{13\pi}{60}, & C_{60,17} = 2R \sin \frac{17\pi}{60}. \end{array} \right.$$

Comme on a

$$\frac{29\pi}{60} + \frac{\pi}{60} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{29\pi}{60} - \frac{\pi}{60} = \frac{7\pi}{15}; \quad \text{etc.}$$

on peut écrire

$$\begin{array}{ll} \frac{\pi}{60} = \frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{30}, & \frac{29\pi}{60} = \frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{30}, \\ \frac{7\pi}{60} = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{15}, & \frac{23\pi}{60} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{15}, \\ \frac{11\pi}{60} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{15}, & \frac{19\pi}{60} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{15}, \\ \frac{13\pi}{60} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{30}, & \frac{17\pi}{60} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{30}. \end{array}$$

Développant les sinus et observant que

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

et que

$$\begin{array}{ll} \cos \frac{7\pi}{30} = \sin \frac{4\pi}{15}, & \cos \frac{2\pi}{15} = \sin \frac{11\pi}{30}, \\ \cos \frac{\pi}{15} = \sin \frac{13\pi}{30}, & \cos \frac{\pi}{30} = \sin \frac{7\pi}{15}, \end{array}$$





## IV.

## Neue Eigenschaft der Kegelschnitte.

Von

K. Zahradnik.

Jeder Kreis schneidet einen Kegelschnitt in vier Punkten; die Parameter der Schnittpunkte erhalten wir, wenn wir die Coordinaten eines Kegelschnittspunktes<sup>1)</sup>

$$x = \frac{2p}{u^2 - q}, \quad y = \frac{2pu}{u^2 - q} \quad (1)$$

in die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + m^2 = 0 \quad (2)$$

einführen, als Wurzeln einer biquadratischen Gleichung in  $u$ . Da nun drei Punkte die Lage des Kreises vollständig bestimmen, so müssen die Parameterwerte der vier Schnittpunkte einer Bedingungsgleichung genügen, und ein Vergleich der Coefficienten der erwähnten biquadratischen Gleichung gibt uns unmittelbar diese Bedingungsgleichung<sup>2)</sup> in Form

$$(u)_3 + q(u)_1 = 0 \quad (3)$$

Für  $u_2 = u_3 = u_4 = u$  wird der Kreis (2) zum Krümmungskreise und die Bedingungsgleichung (3) geht in diesem Falle über in

$$u^3 + 3u^2u_1 + q(3u + u_1) = 0 \quad (4)$$

welche wir auch schreiben können,  $u'$  statt  $u_1$  setzend,

$$u^3 + 3qu + u'(3u^2 + q) = 0 \quad (4')$$

1) Siehe dieses „Archiv“ Teil 61. pag. 220.

2) Siehe Dr. Em. Weyr: „Kegelschnitte“. Sitzb. d. kgl. böhm. Gesellsch. Wissensch. 18. Oct. 1872. Prag, Sepabdr. pag. 29.

Diese Gleichung besagt uns, dass jeder Krümmungskreis im Punkte  $u$  den Kegelschnitt in einem Punkte  $u_1'$  schneidet, und umgekehrt, dass durch jeden Punkt des Kegelschnittes  $u_1$  drei Krümmungskreise hindurchgehen. Die Osculationstriplet bilden nämlich eine cubische Involution. Von den Osculationstripletten können wir nun die Eigenschaft nachweisen, dass ihre Schwerpunkte auf der Nebenachse des Kegelschnittes liegen.

Bezeichnen wir mit  $u_1, u_2, u_3$  die Wurzeln der Gleichung (4'), so erkennen wir, dass dem Kegelschnittspunkte  $u'$  das Osculationstriplet  $u_1 u_2 u_3$  entspricht, somit auch dessen Schwerpunkt  $(\xi\eta)$ . Die Coordinaten des Schwerpunktes eines dem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecks  $(u_1 u_2 u_3)$  sind nun

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{2p}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{u_k^2 - q} \\ \eta &= \frac{2p}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{u_k}{u_k^2 - q}\end{aligned}\tag{5}$$

Sollen nun dessen Ecken die Osculationspunkte des Kegelschnittspunktes  $u'$  sein, so müssen deren Parameter wegen (4) den Gleichungen

$$\begin{aligned}(u)_1 &= -3u' \\ (u)_2 &= 3q \\ (u)_3 &= -qu'\end{aligned}\tag{6}$$

genügen; da nun mit Rücksicht auf (6)

$$\prod_{k=1}^3 (u_k^2 - q) = 16q^2(u'^2 - q)$$

$$(u_1^2 - q)(u_2^2 - q) + (u_2^2 - q)(u_3^2 - q) + (u_3^2 - q)(u_1^2 - q) = -24q(u'^2 - q)$$

ist, folgt

$$\xi = -\frac{p}{q}\tag{7}$$

womit der Satz als bewiesen erscheint.

Agram, Februar 1878.



dort Kunde erhielt von zwei der wertvollsten Handschriften, welche, ohne dass eines Kenners Auge diese Schätze gesehen, unbeachtet in der wiener Hofbibliothek gelegen, trotzdem sie seit 1873 in dem gedruckten Kataloge derselben aufgeführt sind!

Dank der hohen Intervention des auswärtigen Amtes des deutschen Reiches, konnte ich diese Perlen — leider schlecht gefasste — mit Musse benutzen, und mit ihnen, dem Wichtigsten, was ausser dem grossen Werke von Copernicus auf uns gekommen ist, will ich diese Arbeit beginnen. Ihnen werden sich an zweiter Stelle die mathematisch-astronomischen Notizen aus upsalenser und frauenburger Handschriften, an dritter einige Gutachten anschliessen, welche man füglich der angewandten Mathematik zuteilen darf. An vierter Stelle werden endlich diejenigen upsalenser Excerpte mitgeteilt werden, die uns Copernicus von einer ganz andern Seite zeigen: als helfenden Arzt. Dieser Teil seiner Tätigkeit ist bis jetzt durch Documente fast gar nicht aufgeklärt; auch das, was wir bieten können, sind nicht sowohl dergleichen Documente als diätetische Regeln und ärztliche Recepte, welche er in die Bücher eingezeichnet hat, welche teils ihm selbst gehörten, teils zum Gebrauch des bischöflichen Leibarztes, der er ja war, angeschafft waren. Eine Art Anhang wird dann den kurzen Nachweis einiger bis jetzt für das Leben des Copernicus noch nicht verwerteter Documente bringen, bei denen Copernicus als Zeuge fungiert hat.

Ich kann nicht umhin hier die grossen Dienste, welche mir bei der Gestaltung des nachfolgenden Textes mein verehrter College, Herr Oberlehrer Boethke, geleistet hat, mit aufrichtigem Danke hier öffentlich anzuerkennen.

Thorn, im December 1877.

M. Curtze.

---



































motionem sydus ad eam perducitur partem, quæ prius australis fuerat. Nunc autem oppositionis lege septentrionalis facta, donec iterum ad summam perveniat librationis circulo peracto, ubi rursum maxima fit deviatio et primæ simul et æqualis. Sic demum pari modo per  
5 reliquum semicirculum pergit. Quapropter numquam fit meridiana hæc latitudo, quam plerumque deviationem vocant, et hæc duobus orbibus fieri concentricis et axibus obliquis, sicut in superioribus dicebamus, hic quoque consentaneum esse videtur.

### De Mercurio.

- 10 Sed omnium in cælo mirabilissimus est Mercurii cursus, qui pene investigabiles permeat vias, uti perscrutari non facile queat. Addit præterea difficultatem quod sub radiis solis invisibiles plerumque  
15 meatus occupat et paucis admodum diebus visibilem se exhibet, at | tamen comprehendetur et ipse, modo altiori ingenio quispiam incumbat.
- 15 Convenient et huic epicycli duo, ut in Venere, in orbe suo revolubiles. Nam maior epicyclus pariter cum orbe suo facit revolutiones, ut illic, absidis eius sedem gradibus 14 et medio post Virginis Spicam constituens. Minor autem epicyclus contraria illius lege duplici vero  
20 revolutione reflectitur, ut in omni situ telluris, quo absidem huius supervenit vel ex adverso respicit, sydus a centro maioris epicycli remotissimum sit atque in quadrantibus proximum. Et huius quidem orbem tertio mense diximus reverti, hoc est 88 diebus, cuius semidimetiens partes capit 9 et duas quintas unius partis, quarum semidiametrum magni orbis 25 posuimus. Ex his autem primus epicyclus  
25 accipit unam et 41 minuta; secundus autem tertiam eius partem, hoc est minutias 34 fere. Sed is quidem circulorum concursus hic non sufficit ut in ceteris. Terra siquidem in supradictis absidis respectibus permeante longe minori apparet ambitu sydus moveri, quam ratio circulorum iam dicta sustinet; ac rursus in quadraturis longe etiam

Bitt.  
(42a)

15. huic || hinc. —

9. bis zu Ende des Ganzen. Ueber den Abschnitt De Mercurio siehe De rev. Lib. V, Cap. I—III, Lib. VI, Cap. I, II, V—VIII. — 21—26. Et huius quidem orbem — 34 fere. Auch diese Angaben stimmen genau mit den Reliquiæ Copernicanae a. a. O. Dort heisst es: „Mercurii orbis 9.24, Epicyclus  
„a. 1. 41½, b. 0. 33½; colligunt

„1.7½ (diversitas diametri 0.29)“  
26 — S. 131., Z. 19. Sed is quidem circulorum — sic se habet. Specielle Darlegung dieser Erklärungsweise siehe man De Revol. Lib. V, Cap. XXVIII und Cap. XXXII, in denen diese Bewegung von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus dargelegt wird. —





## II. Der Brief des Copernicus an den Domherrn Wapowski<sup>1)</sup> zu Krakau über das Buch des Iohannes Werner<sup>2)</sup> de motu octavarum sphaerae<sup>3)</sup>.

Der fragliche Brief ist zum ersten male in der Warschauer Prachtausgabe der Werke des Copernicus veröffentlicht worden<sup>4)</sup>.

1) Bernhard Wapowski stammte aus der Diöcese Leslau und starb am 21. November 1535. Er ist besonders als Geschichtsforscher und Geograph bekannt. Man vergleiche über denselben Hipler, *Spicilegium Copernicanum*, Braunsberg 1872, S. 172, Anm. 1, und desselben Nikolaus Kopernikus und Martin Luther, daselbst 1868, S. 35, 36.

2) Iohannes Werner, geb. 14. Februar 1468 zu Nürnberg, studierte von 1493 bis 1498 zu Rom, lebte dann als Geistlicher in seiner Vaterstadt, wo er 1528 starb. Sein Hauptverdienst besteht in der Herausgabe vieler Regiomontana. Er war ein tüchtiger Geometer und guter Himmelsbeobachter, wie Tycho von ihm rühmt. Genaueres über sein Leben und seine Werke sehe man in Doppelmayr, *Historische Nachrichten von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern*, Nürnberg 1730. S. 31–35.

3) Die Schrift *de motu octavarum sphaerae* findet sich in einem Bande, der schon zu Tycho's Zeiten zu den Seltenheiten zählte. Dieselbe ist betitelt: „*In hoc opere haec continentur. || LIBELLVS IOANNIS VERNERI || NVREMBERGEN. SVPER VI- || GINTIDVOBVS ELEMEN- || TIS CONICIS. || EIVSDEM. Commentarius seu paraprastica enar- || ratio in vndecim modos conficiendi eius Problema- || tis quod Cubi duplicatio dicitur. || EIVSDEM. Comentatio in Dionysodori proble- || ma quo data sphaera plano sub data secantione, || ALIVS modus idem problema conficiendi ab eodē || Ioanne Vernero nouissime copertus demonstratusq3. || EIVSDEM Ioannis de motu octavarum Sphaerae. || Tractatus duo || EIVSDEM. Summaria enarratio Theoriae motus || octavarum Sphaerae. || (Cum Gratia & Privilegio Imperiali.*“ Sie besteht aus 100 Blatt in 4°, deren letztes leer ist. Auf Blatt 99<sup>b</sup> steht der Druckvermerk: „*IMPRESSVM NVREMBERGAE || per Fridericum Peypus, Impensis Lucae || Alantsee Cuius & Bibliopolae Vi- || cennē. Anno M. D. XXII. || Romanis imperante inuictissimo Carolo Hispaniarū rege. || Cum Gratia & Priuilegio Imperiali.*“ Die Schrift *de motu octavarum sphaerae* umfasst Blatt 45<sup>a</sup> bis Blatt 96<sup>b</sup>. Der erste Tractat ist überschrieben (Blatt 45<sup>a</sup>, Z. 13–17): „*IOANNIS VERNERI NVREMBERGEN. || De motu octavarum sphaerae tractatus primus, qui triginta || quattuor cum theorematibus tñ problematibus || quæ propositiones libuit appellare con- || summat.*“ Der zweite Tractat beginnt Blatt 88, Z. 6–9 mit der Ueberschrift: „*IOANNIS VERNERI NVREMBERGEN- || sis de Motu Octavarum sphaerae Tractatus secundus in || quo Alfonsinae tabulae de eodem motu osten- || dunt iustis reprehensionibus non carere.*“ Der Titel ist von einer Holzschnittbordüre eingefasst.

4) Nicolai Copernici Torunensis *De Revolutionibus Orbium Coelestium Libri Sex. Accedit G. Joachimi Rheticii Narratio Prima Cum Copernici Non-*







führt ihn an in seiner *Vita Copernici* (Ausgabe von 1627)<sup>9)</sup>, endlich erwähnt ihn Doppelmayr in seinen *Historischen Nachrichten von den Nürnberger Math.*<sup>10)</sup> in der Lebensbeschreibung des Iohannes Werner. Dann aber ist derselbe verschollen, bis ihn die warschauer Ausgabe wieder abdruckt. Nach dieser editio princeps gaben ihn mit allen Fehlern wieder heraus Hipler im *Spicilegium Copernicanum*<sup>11)</sup> und Prowe in den *Monumenta Copernicana*<sup>12)</sup>. Nur in polnischer Uebersetzung liess ihn Polkowsky in seinen *Kopernikijana*<sup>13)</sup> abdrucken. Die Lesarten der warschauer Ausgabe, also indirect auch die von Hipler und Prowe, habe ich ebenfalls unter dem Texte notiert; sie stehen unter der Chiffre V.

Die berliner Handschrift hat uns nur die Ueberschrift des Briefes aufbewahrt, die wiener giebt an deren Stelle die Adresse des Briefes wie sie auf dem Umschlage zu lesen war. Auch in dieser Hinsicht ergänzen sich beide Handschriften in glücklicher Weise.

Der nun folgende Text bildet mit den Revolutionen und dem *Commentariolus* zusammen das Wichtigste, was wir in astronomischer Beziehung von Copernicus besitzen.

---

9) „Vita incolumi solitudinem amavit, nec iungebatur amicitia nisi viris doctis, inter quos familiares habuit . . . . Vapovium Cantorem Cracoviensem, ad quem scripsit Epistolam de motu octavæ sphæræ . . . .“

10) Doppelmayr, a. a. O. S. 35, Anm. (II).

11) Hipler, *Spicilegium Copernicanum*, Braunsberg 1873, S. 172–179.

12) Prowe, *Monumenta Copernicana*, Berlin 1873, S. 141–149.

13) X. Ignac Polkowski, *Kopernikijana czyli Materyały do pism i życia Mikołaja Kopernika*. Tom I. Gniezno 1873, S. 69–74.



























## VI.

Nombres relatifs des polygones réguliers de  $n$  et de  $2n$  côtés, suivant que  $n$  est un nombre impair ou un nombre pair.

Par

**Georges Dostor,**

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Paris.

---

1. **Théorème I.** Lorsque  $n$  est un nombre impair, il existe autant de polygones réguliers de  $2n$  côtés, qu'il y a de polygones réguliers de  $n$  côtés.

Soit  $p$  un nombre entier, inférieur à la moitié de  $n$  et premier avec  $n$ . Il existera un polygone régulier de  $n$  côtés et de l'espèce  $p$ .

Puisque  $p$  est inférieur à la moitié de  $n$ ,  $2p$  sera moindre que  $n$ ; par suite  $n - 2p$  sera un nombre entier positif, plus petit que  $n$ , ou que la moitié de  $2n$ .

Or je dis que  $n - 2p$  est aussi premier avec  $2n$ .

En effet,  $n$  étant impair,  $n - 2p$  sera aussi impair. Il s'ensuit que tout facteur entier, commun à  $n - 2p$  et  $2n$ , ne saurait être qu'un nombre impair, qui diviserait  $n$ . Ce facteur impair, divisant  $n - 2p$  et  $n$ , diviserait leur différence  $2p$  et par suite  $p$ . Donc  $p$  et  $n$  ne seraient pas premiers entre eux.

Ainsi à chaque nombre entier  $p$ , inférieur à la moitié de  $n$  et premier avec  $n$ , correspond un nombre entier  $n - 2p$  inférieur à la moitié de  $2n$  et premier avec  $2n$ .



$$C_{2n,n-p} = 2R \sin \frac{(n-p)\pi}{2n},$$

ou

$$C_{2n,n-p} = 2R \sin \left( \frac{n\pi}{2n} - \frac{p\pi}{2n} \right) = 2R \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{2n} \right).$$

On a donc

$$(4) \quad C_{2n,n-p} = 2R \cos \frac{p\pi}{2n}.$$

Elevant au carré les deux côtés (3) et (4) et ajoutant, on trouve la relation

$$C_{2n,p}^2 + C_{2n,n-p}^2 = 4R^2 \left( \sin^2 \frac{p\pi}{n} + \cos^2 \frac{p\pi}{n} \right) = 4R^2,$$

qui démontre notre proposition.

10. **Corollaire I.** Connaissant les valeurs des côtés de la première moitié des polygones réguliers de  $2n$  côtés (ou  $n$  est pair), on peut, au moyen du théorème précédent, calculer les côtés de l'autre moitié des polygones réguliers de  $2n$  côtés.

11. **Corollaire II.** Puisqu'on a

$$C_{2n,p} = 2R \sin \frac{p\pi}{2n},$$

$$C_{2n,n-p} = 2R \cos \frac{p\pi}{2n},$$

on obtient, en multipliant,

$$C_{2n,p} \times C_{2n,n-p} = 4R^2 \sin \frac{p\pi}{2n} \cos \frac{p\pi}{2n},$$

ou

$$C_{2n,p} \times C_{2n,n-p} = 2R^2 \sin \frac{p\pi}{n}.$$

Or

$$2R \sin \frac{p\pi}{n} = C_{n,p};$$

il vient donc

$$C_{2n,p} \times C_{2n,n-p} = R \times C_{n,p}.$$

Ainsi le côté d'un polygone régulier d'un nombre pair de côtés est la quatrième proportionnelle entre le rayon du cercle circonscrit et les côtés des deux polygones réguliers conjugués d'un nombre double de côtés, dont l'un est de même espèce que le premier, et qui sont inscrits dans le même cercle.

Paris, 20 Octobre 1877.







Beweis. In den Vierecken  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$  sei

$$\begin{aligned} \text{Wkl. } BAC &= B'A'C'; & BAD &= B'A'D' \\ ABC &= A'B'C'; & ABD &= A'B'D' \end{aligned}$$

Von den Winkeln  $BAD$ ,  $ABC$  ist wenigstens einer  $< 2R$ ; sei also  $BAD < 2R$ . Man construire eine dreikantige Ecke, deren Seitenwinkel sind  $BAD$  selbst,  $BAE = BAD$  und der beliebig kleine  $DAE$ . Die Construction ist nach Satz IV. möglich, wofern

$$\text{Wkl. } DAE < 4R - 2.BAD$$

Man lege das zweite Viereck so auf das erste, dass die gleichen Winkel bei  $A$  und  $A'$  sich decken; dann ist nur zu beweisen, dass  $CD$  parallel  $C'D'$  wird.

Man zeichne in der Ebene des Winkels  $BAE$  die Figur  $ABEB'E'$  congruent  $ABDB'D'$ , lege eine Ebene durch  $B$ ,  $C$ ,  $E$  und ihr parallel eine andere durch  $B'$ , welche  $AC$  in  $F$  schneidet. Dann ist nach Satz I.

$$B'F \text{ parallel } BC \text{ parallel } B'C'$$

daher fällt  $F$  in  $C'$ . Da nun ebenso nach Satz I.

$$CE \text{ parallel } FE'$$

so ist jetzt

$$CE \text{ parallel } C'E'$$

Betrachten wir den beliebig kleinen Winkel  $DAE$  als unendlich klein, so sind nach Satz VII. auch die Geraden  $DE$  und  $D'E'$  unendlich klein, daher nach demselben Satze auch die Winkel  $DCE$  und  $D'C'E'$ , folglich nach Satz VIII.  $CD$  parallel  $C'D'$ , w. z. b. w.

### Aehnlichkeit der Vielecke, Proportionalität entsprechender Strecken und Verhältnisse von Flächenräumen.

Definition 1. Zwei Vielecke sind einander ähnlich, wenn alle von Seiten und Diagonalen an den Ecken gebildeten Winkel im einen Vieleck den in gleicher Ordnung entsprechenden im andern gleich sind.

Satz 1. Sind zwei Vielecke einem dritten ähnlich, so sind sie einander ähnlich.

Unmittelbare Folge der Definition.

Satz 2. Congruente Vielecke sind einander ähnlich.

Denn, wenn sich die Vielecke decken, decken sich auch die Diagonalen und die von ihnen und den Seiten gebildeten Winkel.





Zieht man noch  $CD$  und  $C'D'$ , so ist auch

$$\text{Wkl. } CAD = C'A'D'$$

und, weil Dreieck  $CAD$  gleichschenkelig,

$$\text{Wkl. } ADC = A'D'C'$$

demnach bei  $A, D$  alle Winkel gleich den entsprechenden bei  $A', D'$ , folglich nach Satz 4.

Viereck  $ABCD$  ähnlich  $A'B'C'D'$

mithin

Dreieck  $ABC$  ähnlich  $A'B'C'$ , w. z. b. w.

Definition 2. Aus 2 Par entsprechenden Seiten ähnlicher Dreiecke lassen sich (nach Satz 6.) ähnliche Dreiecke mit beliebigem Winkel zwischen ihnen bilden. Zwei Par Strecken, die diese Eigenschaft haben, heissen proportionirt. Die 2 Par Strecken  $AB$  und  $A'B'$ ,  $AC$  und  $A'C'$  bilden demnach eine Proportion, geschrieben

$$AB:A'B' = AC:A'C'$$

wenn die Dreiecke  $ABC, A'B'C'$  bei Gleichheit der eingeschlossenen Winkel einander ähnlich werden. Die 4 proportionirten Grössen heissen in ihrer Reihenfolge die Glieder der Proportion, die erste und dritte die Vorderglieder, die 2te und 4te die Hinterglieder.

Satz 7. Zwei Par Strecken, die einzeln mit einem dritten Par in Proportion stehen, bilden auch mit einander eine Proportion.

Folgt aus Satz 1.

Satz 8. Die 2 ersten Glieder einer Proportion kann man mit den 2 letzten vertauschen.

Die Bedeutung der Proportion bleibt dabei dieselbe.

Definition 3. Infolge der Sätze 7. und 8. lässt sich die vergleichende Grössenbeziehung der 2 ersten, wie der 2 letzten Glieder einer Proportion als eine Grösse auffassen, und heisst als solche ihr Verhältniss, sofern die Proportion die Gleichheit der Verhältnisse definirt, und 2 Verhältnisse die einem dritten gleich sind, nach Satz 7. einander gleich sind.

Satz 9. In 2 ähnlichen Vielecken sind die Verhältnisse aller Pare entsprechender Seiten und Diagonalen einander gleich.

Beweis. In 2 ähnlichen Vielecken mögen 4 beliebige Ecken  $A, B, C, D$ , verbunden durch Seiten oder Diagonalen, den gleichnamigen  $A', B', C', D'$  entsprechen. Dann ist



Dreieck  $ADE$  congruent  $A'B'C'$ , also auch ähnlich,  
daher  $ABC$  ähnlich  $A'B'C'$  nach Satz 1.

Satz 13. Zwei Vielecke sind einander ähnlich, wenn alle Seiten und Diagonalen des einen zu den entsprechenden des andern in gleichem Verhältniss stehen.

Denn dann sind nach Satz 12. alle Dreiecke den entsprechenden ähnlich, in die sie durch Diagonalen geteilt werden können, folglich alle Winkel den entsprechenden gleich.

Definition 4. Das Verhältniss, welches aus einem andern durch Vertauschung des Vorder- und Hintergliedes entsteht, heisst dessen reciprokes Verhältniss.

Satz 14. In einer Proportion ist das Rechteck aus den äussern Gliedern gleich dem Rechteck aus den innern, und umgekehrt stehen die Höhen gleicher Rechtecke im reciproken Verhältniss der Grundlinien.

Beweis. Sei

$$AB:A'B' = AC:A'C'$$

Man trage die 2 ersten Glieder auf dem einen, die 2 letzten auf dem andern Schenkel eines rechten Winkels ab, und verbinde sämtliche Endpunkte mit einander. Dann ist

Dreieck  $ABC$  ähnlich  $AB'C'$  nach Satz 6. daher

$$\text{Wkl. } \angle ABC = \angle AB'C' \text{ mithin}$$

$BC$  parallel  $B'C'$  folglich

$$\text{Dreieck } BCB' = BCC'$$

und nach Addition von  $ABC$

$$\text{Dreieck } AB'C = ABC'$$

Ersteres ist das halbe Rechteck aus  $A'B'$  und  $AC$ , letzteres aus  $AB$  und  $A'C'$ , womit der Satz bewiesen ist.

Sind umgekehrt diese Rechtecke gleich, so sind es auch die Dreiecke und alle vorhergehenden Schlüsse lassen sich umkehren, so dass schliesslich die anfängliche Proportion hervorgeht.

Satz 15. Die äussern, sowie die innern Glieder einer Proportion von Linien kann man vertauschen.

Folgt unmittelbar aus Satz 14.

Satz 16. Die Grundlinien zweier Rechtecke von gleichen Höhen verhalten sich wie die zweier andern ebenso grossen Rechtecke von gleichen Höhen.



**Proportionen und Aehnlichkeit, abgeleitet  
aus der Flächengleichheit.**

**Definition 1.** Vier Strecken in bestimmter Reihenfolge bilden eine Proportion, wenn das Rechteck aus der ersten und 4ten gleich dem Rechteck aus der 2ten und 3ten ist.

**Folgerungen.** Die Bedeutung der Proportion bleibt dieselbe, wenn man die äussern oder die innern oder die äussern mit den innern Gliedern vertauscht, ferner wenn man die 2 ersten mit den 2 letzten oder beide Paare gleichzeitig vertauscht.

**Satz 1.** Bildet ein Paar Strecken mit jedem von zwei andern Paaren eine Proportion, so bilden letztere mit einander eine Proportion.

**Beweis.** Sei

$$g:h = g_1:h_1; \quad g:h = g_2:h_2$$

und zwar

$$g < g_1 < g_2; \quad h < h_1 < h_2$$

Man trage die Strecken  $g, g_1, g_2$  auf dem einen,  $h, h_1, h_2$  auf dem andern Schenkel eines rechten Winkels ab und vollende die Rechtecke  $gh, g_1h_1, g_2h_2$ . Den Proportionen zufolge ist

$$\text{Rechteck } gh_1 = g_1h; \quad gh_2 = g_2h$$

daher nach Subtraction gemeinsamer Stücke

$$\text{Rechteck } g(h_1 - h) = (g_1 - g)h; \quad g(h_2 - h) = (g_2 - g)h$$

Hieraus folgt nach einem bekannten und leicht zu beweisenden Satze, dass die vierten Ecken der construirten 3 Rechtecke mit dem Scheitel des rechten Winkels in gerader Linie liegen, und hieraus nach dem umgekehrten Satze, dass

$$\text{Rechteck } g_1(h_2 - h_1) = (g_2 - g_1)h_1$$

daher nach Addition des Rechtecks  $g_1h_1$ , dass

$$\text{Rechteck } g_1h_2 = g_2h_1$$

ist, mithin die Proportion stattfindet:

$$g_1:h_1 = g_2:h_2$$

Stehen die  $g$  und die  $h$  in anderer Grössenfolge, so sind nur ihre Differenzen entgegengesetzt, und die Gleichungen gelten unverändert.

**Definition 2.** Infolge dieses Satzes kann man die Beziehung der Strecken  $g, h$  als Grösse auffassen, deren Gleichheit durch die Proportion defnirt ist; in diesem Sinne heisst dieselbe das Verhältniss von  $g$  zu  $h$ .



Beweis. Zunächst folgt, dass auch der dritte Winkel in beiden gleich ist. Man lege die Dreiecke mit einem Par gleicher Winkel auf einander, so dass die andern Pare correspondirende werden; dann sind die Gegenseiten des erstern parallel, und nach Satz 2. folgt eine der Proportionen, welche Bedingung der Aehnlichkeit sind, analog die beiden andern.

Satz 5. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ein Winkel des einen gleich einem Winkel des andern, und die die gleichen Winkel einschliessenden Seiten proportionirt sind.

Beweis. Man lege die Dreiecke mit den gleichen Winkeln auf einander; dann sind nach Satz 2. die Gegenseiten parallel, daher alle Winkelpaare gleich, folglich nach Satz 4. die Dreiecke ähnlich.

Satz 6. Zwei ähnliche Vielecke sind congruent, wenn ein Par entsprechende Seiten oder Diagonalen in beiden gleich sind.

Beweis. Seien  $A, B, C$  drei beliebige Ecken des einen,  $A', B', C'$  die entsprechenden des ähnlichen Vielecks, und  $AB = A'B'$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \text{Rechteck aus } AB \text{ und } A'C' &= \text{Rechteck aus } AC \text{ und } A'B' \\ &\quad \text{oder aus } AC \text{ und } AB \end{aligned}$$

folglich

$$A'C' = AC$$

Analog sind alle entsprechenden Seiten und Diagonalen beider Vielecke gleich, also diese congruent.

Satz 7. In ähnlichen Vielecken sind die Winkel zwischen entsprechenden Seiten und Diagonalen gleich.

Beweis. Alle Dreiecke, welche von Seiten und Diagonalen des einen Vielecks gebildet werden, sind den entsprechenden im andern Vieleck ähnlich. Seien  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei solche ähnliche Dreiecke. In einem dritten Dreieck  $A''B''C''$  sei

$$A''B'' = A'B'; \quad A''C'' = A'C'; \quad \text{Wkl. } B'A''C'' = BAC$$

Dann ist nach Satz 4.

Dreieck  $A''B''C''$  ähnlich  $ABC$ , also auch ähnlich  $A'B'C'$ , da es aber mit letzterem 2 gleiche Seiten hat, auch congruent, folglich

$$\text{Wkl. } BAC = B'A''C'' = B'A'C'$$

Das Analoge gilt von allen Winkelparen.

---

Alle übrigen Sätze lassen sich nun auf gewöhnliche Weise rein geometrisch herleiten.

---



## VIII.

## Summation einiger Reihen.

Von

R. Hoppe.

Das Folgende soll durch eine Succession von Reihensummationen schliesslich zur Summation einer Doppelreihe hinführen, die auch als Entwicklungsformel nicht ohne Anwendung ist.

## §. 1.

Seien  $a$  und  $b$  beliebige Constanten,  $r$  und  $m$  ganze Zahlen  $\geq 0$ , und  $r < m$ ; dann verschwindet offenbar die Grösse

$$\frac{\partial^r (1-u)^m u^{a+r}}{\partial u^r}$$

für  $u = 1$ . Führt man die angedeutete Rechnung durch Entwicklung nach Potenzen aus, so ergibt sich:

$$0 = \sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h (m)_h (a+h+1)(a+h+2)\dots(a+h+r)$$

und nach Division durch  $\Gamma(a+r+1)$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h (m)_h \frac{\Gamma(a+h+r+1)}{\Gamma(a+h+1) \Gamma(a+r+1)} \\ &= \sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h (m)_h \frac{(a+r+1)(a+r+2)\dots(a+r+h)}{\Gamma(a+h+1)} \end{aligned}$$

gültig für  $r = 0, 1, \dots, m-1$ . Daher ist, wenn man jetzt  $b$  für  $r$  schreibt,

$$\sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h (m)_h \frac{(a+b+1)(a+b+2)\dots(a+b+h)}{\Gamma(a+h+1)}$$

eine ganze Function  $m$ ten Grades von  $b$ , welche für die  $m$  Werte  $b = 0, 1, 2, \dots, m-1$  verschwindet, und als solche

$$= Ab(b-1)\dots(b-m+1)$$

Zur Bestimmung der Constanten  $A$  setzen wir

$$b = -a-1$$

dann verschwinden alle Terme ausser dem ersten, und es bleibt:

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)} = (-1)^m A(a+1)(a+2)\dots(a+m) = \frac{(-1)^m A \Gamma(a+m+1)}{\Gamma(a+1)},$$

woraus:

$$A = \frac{(-1)^m}{\Gamma(a+m+1)}$$

Multiplicirt man noch mit  $\Gamma(a+1)$ , so lautet unser erstes Resultat:

$$\sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h (m)_h \frac{(a+b+1)(a+b+2)\dots(a+b+h)}{(a+1)(a+2)\dots(a+h)} = (-1)^m \frac{b(b-1)\dots(b-m+1)}{(a+1)(a+2)\dots(a+m)} \quad (1)$$

## §. 2.

Wir geben nun  $a$  und  $b$  zweierlei Specialwerte, nämlich

$$\text{I. } a = -\frac{1}{2}; \quad b = -l-1$$

$$\text{II. } a = \frac{1}{2}; \quad b = -l-2$$

wo  $l$  positive ganze Zahl sei. Dann wird die Formel bzhw.:

$$\sum_{h=0}^{h=m} (m)_h \frac{2l+1}{1} \frac{2l-1}{3} \dots \frac{2l-2h+3}{2h-1} = 2^m \frac{l+1}{1} \frac{l+2}{3} \dots \frac{l+m}{2m-1}$$

$$\sum_{h=0}^{h=m} (m)_h \frac{2l+1}{3} \frac{2l-1}{5} \dots \frac{2l-2h+3}{2h+1} = 2^m \frac{l+2}{3} \frac{l+3}{5} \dots \frac{l+m+1}{2m+1}$$

oder nach Ergänzung der natürlichen Zahlenreihe in den Factoren:

$$\sum_{h=0}^{h=m} \frac{m! (2l+1)! (l-h)!}{(m-h)! (2l-2h+1)! l! (2h)!} = 2^{2m} \frac{m! (l+m)!}{(2m)! l!}$$

$$\sum_{h=0}^{h=m} \frac{m! (2l+2)! (l-h)!}{2(m-h)! (2l-2h+1)! (l+1)! (2h+1)!} = 2^{2m} \frac{m! (l+m+1)!}{(2m+1)! (l+1)!}$$

Multipliziert man bzhw. mit

$$\frac{l!}{m!(l-m)!}, \quad \frac{2(l+1)!}{m!(l-m)!}$$

so kommt:

$$\sum_{h=0}^{h=m} (2l+1)2^h (l-h)_{l-m} = 2^{2m} (l+m)_{l-m}$$

$$\sum_{h=0}^{h=m} (2l+2)2^{h+1} (l-h)_{l-m} = 2^{2m+1} (l+m+1)_{l-m}$$

und nach Substitution von  $l-h$  für  $h$ :

$$\sum_{h=l-m}^{h=l} (2l+1)2^{h+1} (h)_{l-m} = 2^{2m} (l+m)_{l-m}$$

$$\sum_{h=l-m}^{h=l} (2l+2)2^{h+1} (h)_{l-m} = 2^{2m+1} (l+m+1)_{l-m}$$

Zur Vereinfachung sei erst

$$m = l - k$$

dann wird bzhw.:

$$\sum_{h=k}^{h=l} (2l+1)2^{h+1} (h)_k = 2^{2l-2k} (2l-k)_k$$

$$\sum_{h=k}^{h=l} (2l+2)2^{h+1} (h)_k = 2^{2l+1-2k} (2l+1-k)_k$$

Jetzt setzen wir bzhw.

$$\text{I. } 2l = n + k$$

$$\text{II. } 2l+1 = n + k$$

so dass I. geraden, II. ungeraden  $n+k$  entspricht; dann werden beide Gleichungen übereinstimmend:

$$\sum_{h=k}^{h=\frac{n+k}{2}} (n+k+1)2^{h+1} (h)_k = 2^{n-k} (n)_k \quad (2)$$

gültig für alle positiven ganzen Zahlen  $n, k$ .

### §. 3.

Multipliziert man Gl. (2) mit

$$\frac{(-2)^k (k)_m}{n+k+1}$$

summiert nach  $k$  zwischen den weitesten Grenzen  $m, n$ , so kommt:



$$L = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (ux)^{2n+1} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{u^{-k} (v-2u)^{k-n-1}}{k} \sum_{h=k-n-1}^{\frac{k-1}{2}} (k)_{2h+1} (h)_{k-n-1}$$

und nach Vertauschung der Summationsfolge:

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{-k}}{k} \sum_{h=0}^{\frac{k-1}{2}} (k)_{2h+1} \sum_{n=k-h-1}^{k-1} (-1)^n (h)_{k-n-1} (v-2u)^{k-n-1} (ux)^{2n+1}$$

und nach Substitution von  $k-n-1$  für  $n$ :

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} u^{-k}}{k} \sum_{h=0}^{\frac{k-1}{2}} (k)_{2h+1} \sum_{n=0}^{n=h} (h)_n (2u-v)^n (ux)^{2k-2n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} u^{-k}}{k} \sum_{h=0}^{\frac{k-1}{2}} (k)_{2h+1} (ux)^{2k-2h-1} R^{2h} \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$R = \sqrt{u^2 x^2 + 2u - v}$$

gesetzt ist, oder, wenn man mit Tilgung der geraden  $h$  durch den Factor

$$\frac{1 - (-1)^h}{2}$$

die Werte von  $2h+1$  durch  $h$  vertreten lässt:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2kR} \sum_{h=0}^{k-1} (k)_h (ux)^{k-h} x^k R^h \{1 - (-1)^h\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{2kR} \{(ux+R)^k - (ux-R)^k\} \\ &= \frac{1}{2R} \log \frac{1+ux^2+xR}{1+ux^2-xR} \end{aligned}$$

Das Product von Zähler und Nenner ist  $= 1+vx^2$ ; daher lautet das Resultat:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n+1)!} u^n x^{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} (n+m)_m \left(\frac{v}{u}\right)^m &= \\ \frac{1}{R} \log \frac{1+ux^2+xR}{\sqrt{1+vx^2}} & \quad (4) \end{aligned}$$

## §. 5.

Um von Gl. (4) eine Anwendung zu zeigen, soll das Integral

$$S_n = \int \frac{u^n \partial u}{R} \quad (5)$$

berechnet werden. Man hat, wenn man

$$w = \log \frac{1 + ux^2 + xR}{\sqrt{1 + vx^2}}$$

setzt, für constantes  $x$  und  $v$ :

$$\frac{\partial u}{R} = \frac{\partial w}{x}$$

$$\partial(u^{n-1}R) = \{nx^2u^n + (2n-1)u^{n-1} - (n-1)vu^{n-2}\} \frac{\partial u}{R}$$

also, mit Weglassung der Integrationsconstanten:

$$S_0 = \frac{w}{x}$$

$$nx^2S_n = u^{n-1}R - (2n-1)S_{n-1} + (n-1)vS_{n-2} \quad (6)$$

woraus erhellt, dass das gesuchte Integral, bei Trennung des algebraischen und logarithmischen Teils, die Form hat:

$$S_n = q_n \frac{w}{x} + NR$$

Nach Einführung in die vorige Gleichung ergibt sich ausser einer Relation der  $N$ , die wir, wie sich zeigen wird, bei Seite lassen können, die folgende Relation der  $q$ :

$$nx^2q_n = -(2n-1)q_{n-1} + (n-1)vq_{n-2}; \quad q_0 = 1$$

welche erfüllt wird durch

$$q_n = \frac{(-1)^n}{(2x^2)^n} \sum_{k=0}^n (n)_k (2n-2k)_n (vx^2)^k \quad (7)$$

Dieser Ausdruck enthält von  $x$  nur Potenzen mit negativen Exponenten. In gleichem Falle ist offenbar die Entwicklung von  $N$  nach Gl. (6). Demnach sind sämtliche Terme des Ausdrucks von  $S_n$  für sehr kleine  $x$  so gross, dass die numerische Rechnung so gut wie unmöglich wird. Sei z. B.  $x = 0,000\,001$ ;  $v = 1$ ; die obere Grenze der  $u$  auch  $= 1$ ; dann ist  $S_n < 1$ , besteht aber aus Termen  $> 10^{12n}$ ; man würde folglich, um  $S_{10}$  auf 6 Stellen zu finden, jeden Term auf 126 Stellen berechnen müssen.



$$S_n = \frac{(-1)^n R}{(2x^2)^n} \sum_{h=n}^{\infty} (-2ux^2)^h \sum_{m=0}^{h-n} \left(\frac{v}{2u}\right)^m M_{n,h,m}$$

als in  $x$  stetiger Teil übrig bleibt.

Zur Summation des Ausdrucks der  $M$  lässt sich eine bekannte Formel anwenden, die man leicht folgenderweise gewinnen kann. Für  $u = 0$  ist

$$\frac{\partial^r (1 - e^u)^m}{\partial u^r} = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (m)_k k^r$$

Die Linke ist  $= 0$  für  $r < m$ . Setzt man für  $r$  nach einander 0, 1, 2, ...  $m-1$ , multiplicirt jede Gleichung mit einer beliebigen Constanten und addirt, so ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (m)_k \varphi(k) = 0 \quad (8)$$

wo  $\varphi$  eine beliebige ganze Function von niederem als  $m$ tem Grade bezeichnet.

Zunächst schreiben wir die gegebene Gleichung wie folgt:

$$M_{n,h+n,m} = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (m)_k (h+n-2k+m)_m p \quad (9)$$

$$p = \frac{(n-2k+1)(n-2k+2) \dots (n-2k+h)(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-k+h)}{(2n-2k+1)(2n-2k+2) \dots (2n-2k+2h+1)}$$

Als Function von  $k$  ist der Zähler des letzten Ausdrucks vom Grade  $2h$ , der Nenner vom Grade  $2h+1$ ; daher erhält man nach Zerlegung in Partialbrüche:

$$p = \sum_{\mu=1}^{\mu=2h+1} (-1)^{\mu-1} \frac{P_{\mu}}{2n-2k+\mu}$$

$$P_{\mu} = (-1)^h \frac{(n+\mu-1)(n+\mu-2) \dots (n+\mu-h)(2-\mu)(4-\mu) \dots (2h-\mu)}{2^h(\mu-1)!(2h+1-\mu)!}$$

Dies in Gl. (9) eingeführt giebt:

$$M_{n,h+n,m} = \sum_{\mu=1}^{\mu=2h+1} (-1)^{\mu-1} P_{\mu} \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (m)_k \frac{(h+n-2k+m)_m}{2n-2k+\mu} \quad (10)$$

Entwickelt man den letzten Zähler nach Potenzen des Nenners, so kommt:

$$\begin{aligned} (h+n-2k+m)_m &= \{(2n-2k+\mu) + (h-n-\mu+m)\}_m \\ &= (h-n-\mu+m)_m + \varphi(k)(2n-2k+\mu) \end{aligned}$$



wo  $\varphi(k)$  eine ganze Function  $(m-1)$ ten Grades ist, so dass der zweite Teil nach Einführung in (10) zufolge der Gl. (8) verschwindet. Jetzt geht Gl. (10) über in

$$M_{n,h+n,m} = \sum_{\mu=1}^{\mu=2h+1} Q_{\mu} H$$

$$Q_{\mu} = P_{\mu} (h-n-\mu+m)_m$$

$$= (-1)^{m+1} \frac{(n+\mu-1)(n+\mu-2)\dots(n+\mu-h-m)(2-\mu)(4-\mu)\dots(2h-\mu)}{2^h m! (\mu-1)! (2h+1-\mu)!}$$

$$H = \sum_{k=0}^{k=m} \frac{(-1)^k (m)_k}{2n-2k+\mu} = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (m)_k \int_0^1 r^{2n-2k+\mu-1} \partial r$$

$$= \int_0^1 r^{2n+\mu-1} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^m \partial r = (-1)^m \int_0^1 r^{2n+\mu-2m-1} (1-r^2)^m \partial r$$

$$= (-1)^m \frac{\Gamma\left(n-m+\frac{\mu}{2}\right) \Gamma(m+1)}{2\Gamma\left(n+1+\frac{\mu}{2}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^m m!}{2\left(n+\frac{\mu}{2}\right)\left(n-1+\frac{\mu}{2}\right)\dots\left(n-m+\frac{\mu}{2}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^m 2^m m!}{(2n+\mu)(2n+\mu-2)\dots(2n+\mu-2m)}$$

das ist

$$M_{n,h+n,m} = (-1)^h 2^{m-h} \sum_{\mu=1}^{\mu=2h+1} (-1)^{\mu-1} \frac{(2-\mu)(4-\mu)\dots(2h-\mu)}{(\mu-1)!(2h+1-\mu)!} \times$$

$$\frac{(n+\mu-1)(n+\mu-2)\dots(n+\mu-h-m)}{(2n+\mu)(2n+\mu-2)\dots(2n+\mu-2m)}$$

Da die Terme für gerade  $\mu$  verschwinden, so kann man  $2\mu+1$  für  $m$  setzen und erhält nach einigen Reductionen:

$$M_{n,h+n,m} = \frac{(-1)^h 2^{m-2h}}{h!} \sum_{\mu=0}^{\mu=h} (-1)^{\mu} (h)_{\mu} \times$$

$$\frac{(n+2\mu)(n+2\mu-1)\dots(n+2\mu-h-m+1)}{(2n+2\mu+1)(2n+2\mu-1)\dots(2n+2\mu-2m+1)}$$

Demnach lautet die Entwicklung von  $\frac{1}{R} S_n$  nach Potenzen von  $x$

!.

$$\frac{1}{R} \int \frac{u^n \partial u}{R} = u^n \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{(\frac{1}{2}ux^2)^h}{h!} \sum_{m=0}^{m=h+n} \left(\frac{v}{u}\right)^m \sum_{\mu=0}^{\mu=h} (-1)^\mu (h)_\mu \times$$

$$\frac{(n+2\mu)(n+2\mu-1)\dots(n+2\mu-h-m+1)}{(2n+2\mu+1)(2n+2\mu-1)\dots(2n+2\mu-2m+1)} \quad (11)$$

Bis zu 2. Potenz von  $x$  erhält man:

$$\frac{1}{R} \int \frac{u^n \partial u}{R} = u^n \sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\frac{v}{u}\right)^m \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{(2n+1)(2n-1)\dots(2n-2m+1)}$$

$$+ \frac{1}{2} u^{n+1} x^2 \sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\frac{v}{u}\right)^m \left\{ \frac{n(n-1)\dots(n-m)}{(2n+1)(2n-1)\dots(2n-2m+1)} \right.$$

$$\left. - \frac{(n+2)(n+1)\dots(n-m+2)}{(2n+3)(2n+1)\dots(2n-2m+3)} \right\} + \dots \quad (12)$$

Die Klammer unter einem Nenner vereinigt giebt:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-m+2)(m+1)\{(2n+3)m-2(n+1)^2\}}{(2n+3)(2n+1)\dots(2n-2m+1)}$$

woraus ersichtlich, dass sich für höhere Potenzen von  $x$  der Coefficient von  $\left(\frac{v}{u}\right)^m$  nicht als Monom darstellen lässt.

IX.

Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du quatrième ordre\*).

Par

P. Appell.

Soit une courbe gauche unicursale du quatrième ordre dont les coordonnées s'expriment en fonction d'un paramètre  $\lambda$  de la façon suivante :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E}{\alpha\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \varepsilon} \\ y = \frac{A'\lambda^4 + B'\lambda^3 + C'\lambda^2 + D'\lambda + E'}{\alpha\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \varepsilon} \\ z = \frac{A''\lambda^4 + B''\lambda^3 + C''\lambda^2 + D''\lambda + E''}{\alpha\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \varepsilon} \end{array} \right.$$

A un point de la courbe correspond une seule valeur du paramètre  $\lambda$  et réciproquement. Considérons trois points de la courbe correspondant aux valeurs  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  du paramètre; le plan de ces trois points coupe la courbe en un quatrième point  $\lambda_4$  parfaitement déterminé, et il y a réciprocité entre les quatre points. Les quatre valeurs  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  du paramètre sont donc liées par une relation de la forme suivante :

$$(2) \quad a\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + b(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4\lambda_1 + \lambda_4\lambda_1\lambda_2) + c(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4) + d(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + f = 0$$

\* Voir „comptes rendus 18 décembre 1876.“





plexe linéaire. J'ai montré dans un article précédent (Tome LX. page 274.) que pour toutes les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire le déterminant

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$$

est un carré parfait; d'où il résulte que pour une pareille courbe, l'équation qui donne les points où le plan osculateur est stationnaire n'a que des racines doubles. Ainsi, dans le cas actuel, il faut que l'équation (5) n'ait que des racines doubles, ce qui exige que l'on ait

$$(6) \quad 3c - \frac{2b^2}{a} = \frac{bf}{d} = \frac{ad}{b}$$

Ces conditions nécessaires sont suffisantes comme il résultera de l'étude des propriétés des courbes pour lesquelles elles sont satisfaites. Si les relations (6) ont lieu, les quatre points de la courbe où le plan osculateur est stationnaire sont confondus deux à deux; les deux points I et I', avec lesquels ces quatre points viennent se confondre deux à deux, sont des points simples en chacun desquels la tangente a trois points confondus communs avec la courbe. Soient  $\lambda'$  et  $\lambda''$  les deux valeurs du paramètre correspondant à ces deux points I et I', c'est à dire les deux racines doubles de l'équation (5); si l'on substitue au paramètre  $\lambda$  le paramètre  $\mu$  lié à  $\lambda$  par la relation

$$(7) \quad \lambda = \frac{\lambda'\mu - \lambda''}{\mu - 1}$$

les expressions (1) deviendront des expressions rationnelles du quatrième degré en  $\mu$ , et les deux racines doubles de l'équation du quatrième degré en  $\mu$  correspondant à l'équation (5) seront  $\mu = 0$ ,  $\mu = \infty$ . De sorte que par l'effet de cette substitution l'équation (5) se réduit à

$$\mu^2 = 0$$

c'est à dire que les nouvelles valeurs des coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $f$  sont nulles, et que la relation fondamentale (2) entre les valeurs du paramètre correspondant à quatre points dans un même plan se réduit à

$$(8) \quad \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4 = 0$$

d'où il résulte que le terme en  $\mu^2$  manque dans les expressions de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en fonction de  $\mu$ ; ces expressions seront donc de la forme

$$x = \frac{A_1\mu^4 + B_1\mu^3 + D_1\mu + E_1}{\alpha_1\mu^4 + \beta_1\mu^3 + \delta_1\mu + \varepsilon_1}$$



du point  $\mu'$  à la courbe a son point de contact au point  $\mu$ . La relation  $\mu + \mu' = 0$  exprime que les quatre points  $\mu, \mu', I, I'$  sont dans un même plan.

Supposons maintenant que l'on ait sur la courbe quatre points  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  vérifiant la relation (8), et cherchons l'équation du plan des quatre points. Soit

$$lX + mY + nZ + pT = 0$$

cette équation; les valeurs  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  sont les racines de l'équation

$$l\mu^4 + m\mu^3 + n\mu + p = 0$$

on a donc

$$S_1 = -\frac{m}{l}, \quad S_3 = -\frac{n}{l}, \quad S_4 = \frac{p}{l}$$

et l'équation du plan des quatre points est

$$(10) \quad X - S_1 Y - S_3 Z + S_4 T = 0$$

Cette équation (10) nous donne, comme cas particulier, l'équation du plan osculateur au point de paramètre  $\mu'$ . Soit  $\mu$  le point où le plan osculateur en  $\mu'$  coupe la courbe, on a

$$\mu + \mu' = 0$$

Les paramètres correspondant aux quatre points d'intersection du plan osculateur avec la courbe sont donc

$$\mu_1 = -\mu', \quad \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu'$$

et l'équation de ce plan est, d'après (10)

$$(11) \quad X - 2\mu' Y + 2\mu'^3 Z - \mu'^4 T = 0$$

Soient  $X', Y', Z', T'$  les coordonnées d'un point de l'espace, les valeurs du paramètre correspondant aux points de contact des plans osculateurs menés de ce point à la courbe sont les racines de l'équation du quatrième degré

$$(12) \quad X' - 2\mu' Y' + 2\mu'^3 Z' - \mu'^4 T' = 0$$

Donc, d'un point de l'espace on peut mener quatre plans osculateurs à la courbe; comme le terme en  $\mu'^2$  manque dans l'équation (12), les quatre points de contact de ces quatre plans sont dans un même plan. Cherchons l'équation de ce plan. Soient  $S_1', S_3', S_4'$  la somme des racines de l'équation (12), la somme de leurs produits trois à trois, leur produit; l'équation cherchée sera d'après (10)

$$X - S_1' Y - S_3' Z + S_4' T = 0$$

c'est à dire





— ligne droite; lorsque le  
décrit la courbe, la droite des po  
nique conjuguée par rapport au t  
scrite dans l'hexagone des tangente

La lemniscate est un cas part.  
quatrième ordre.

X.

Sur les fractions continues périodiques.

Par

P. Appell.

Etant donnée la fraction continue périodique

$$u_1 + \frac{1}{u_2 + \frac{1}{u_3 + \dots + \frac{1}{u_p + \frac{1}{u_1 + \dots}}}}$$

je me propose de chercher l'expression de la valeur de la  $n^{\text{ième}}$  réduite en fonction de  $n$  et des quantités  $u_1, u_2, \dots, u_p$ . Soient  $P_n$  et  $Q_n$  le numérateur et le dénominateur de cette réduite, on a

$$\begin{aligned} (1) \quad P_n &= u_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n &= u_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{aligned}$$

avec

$$(2) \quad u_{n+p} = u_n$$

Les deux équations (1) montrent que  $P_n$  et  $Q_n$  sont des intégrales particulières de l'équation aux différences finies

$$(3) \quad X_n = u_n X_{n-1} + X_{n-2}$$

dans laquelle  $u_n$  satisfait à la relation (2); de sorte que la résolution du problème proposé revient à l'intégration de cette équation.

Avant d'aborder le cas le plus général, considérons quelques cas particuliers. Le cas de  $p = 1$  n'offre aucune difficulté;  $u_p$  est alors une constante  $u_1$ , et l'intégrale générale de l'équation

$$X_n = u_1 X_{n-1} + X_{n-2}$$



$$X_n = [A_1 + A_2(-1)^n]a^n + [B_1 + B_2(-1)^n]b^n$$

$a$  et  $b$  étant les racines carrées arithmétiques des deux racines de l'équation du second degré

$$x^2 - (2 + u_1 u_2)x + 1 = 0$$

$A_1, A_2, B_1, B_2$  étant des constantes arbitraires. De cette expression de  $X_n$  on déduira celles de  $P_n$  et  $Q_n$  par la détermination des constantes arbitraires. Pour obtenir par exemple  $Q_n$ , il faudra déterminer les quatre constantes par les équations

$$\begin{aligned} X_0 &= Q_0 = 0 \\ X_1 &= Q_1 = 1 \\ X_2 &= Q_2 = u_2 \\ X_3 &= Q_3 = 1 + u_1 u_2 \end{aligned}$$

à dire

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + B_1 + B_2 &= Q_0 \\ (A_1 - A_2)a + (B_1 - B_2)b &= Q_1 \\ (A_1 + A_2)a^2 + (B_1 + B_2)b^2 &= Q_2 \\ (A_1 - A_2)a^3 + (B_1 - B_2)b^3 &= Q_3 \end{aligned}$$

l'on tire

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \frac{b^2 Q_0 - Q_2}{b^2 - a^2} \\ A_1 - A_2 &= \frac{b^2 Q_1 - Q_3}{a(b^2 - a^2)} \\ B_1 + B_2 &= \frac{a^2 Q_0 - Q_2}{a^2 - b^2} \\ B_1 - B_2 &= \frac{a^2 Q_1 - Q_3}{b(a^2 - b^2)} \end{aligned}$$

dans l'expression (5) on remplace  $A_1, A_2, B_1, B_2$  par ces valeurs si déterminées on aura  $Q_n$ .

Pour avoir  $P_n$  il faudra dans cette même expression donner aux constantes d'autres valeurs  $A_1', A_2', B_1', B_2'$  déterminées par les relations que l'on déduit des équations (8) en changeant  $Q$  en  $P$ , avoir

$$\begin{aligned} A_1' + A_2' &= \frac{b^2 P_0 - P_2}{b^2 - a^2} \\ A_1' - A_2' &= \frac{b^2 P_1 - P_3}{a(b^2 - a^2)} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$











$$-\frac{1}{v} \cdot \left( a + c \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{1}{v'} \cdot \left( a' + c' \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0$$

$$-\frac{1}{v} \cdot \left( b + c \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{1}{v'} \cdot \left( b' + c' \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0$$

Setzen wir den Quotienten  $\left( \frac{1}{v'} : \frac{1}{v} \right) = \frac{v}{v'} = k$  einer Constanten und nehmen die gleichartigen Glieder zusammen, so erhalten wir schliesslich:

$$(4) \quad (a'k - a) + (c'k - c) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$(5) \quad (b'k - b) + (c'k - c) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

in welcher Form wir unsere Bedingungsgleichungen fortan verwenden wollen.

Wir trachten nun diese Bedingungen durch eine geometrisch ausdrückbare zu ersetzen. Zu diesem Behufe führen wir zunächst eine Ebene durch die Wege  $PB$  und  $BP'$ . Die Gleichung derselben muss, da sie durch den Punkt  $B(x, y, z)$  geht, die Form haben:

$$G(\xi - x) + H(\eta - y) + K(\zeta - z) = 0$$

oder durch  $K$  dividirt und die constanten Coefficienten mit  $C$  und  $D$  bezeichnet:

$$C(\xi - x) + D(\eta - y) + (\zeta - z) = 0.$$

$C$  und  $D$  bestimmen sich aus der Bedingung, dass die Gleichungen für die Wege, nämlich jene von

$$PB \text{ oder } s \dots \left\{ \begin{array}{l} \xi - x = \frac{a}{c}(\zeta - z) \\ \eta - y = \frac{b}{c}(\zeta - z) \end{array} \right.$$

und von

$$BP' \text{ oder } s' \dots \left\{ \begin{array}{l} \xi - x = \frac{a'}{c'}(\zeta - z) \\ \eta - y = \frac{b'}{c'}(\zeta - z) \end{array} \right.$$

die Gleichung der Ebene erfüllen müssen. Man erhält durch Einsetzen derselben unmittelbar:

$$C \cdot \frac{a}{c} + D \cdot \frac{b}{c} + 1 = 0$$

$$C \cdot \frac{a'}{c'} + D \cdot \frac{b'}{c'} + 1 = 0.$$

Aus diesen folgt durch gegenseitige Elimination:

$$C \cdot \left( \frac{a}{c} \cdot \frac{b'}{c'} - \frac{a'}{c'} \cdot \frac{b}{c} \right) + \left( \frac{b'}{c'} - \frac{b}{c} \right) = 0 \text{ oder } C = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}$$

$$D \cdot \left( \frac{b}{c} \cdot \frac{a'}{c'} - \frac{b'}{c'} \cdot \frac{a}{c} \right) + \left( \frac{a'}{c'} - \frac{a}{c} \right) = 0 \text{ oder } D = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b},$$

welche Werte in die obige allgemeine Form der Ebenengleichung zu setzen kommen und ergeben:

$$(bc' - b'c) \cdot (\xi - x) + (a'c - ac') \cdot (\eta - y) + (ab' - a'b) \cdot (\xi - z) = 0$$

Dies ist die Gleichung der Ebene  $PBP'$ .

Errichtet man im Punkte  $B$  an die Grenzfläche  $F$  die Normale oder das Einfallslot  $N$ , so lässt sich leicht zeigen, dass unsere Ebene  $PBP'$  dieselbe ebenfalls enthalten muss.

Zu diesem Behufe stellen wir die Gleichungen der Normale  $N$  auf; diese sind:

$$N) \quad \begin{cases} \xi - x = - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot (\xi - z) \\ \eta - y = - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot (\xi - z) \end{cases}$$

Weil der Punkt  $B$  in seiner Lage an die Bedingungsgleichungen (4) und (5) gebunden ist, so haben wir aus diesen die Werte für die partiellen Ableitungen von  $z$  nach  $x$  und  $y$  zu entnehmen. Diese sind:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{a'k - a}{c'k - c} \quad \text{und:} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{b'k - b}{c'k - c},$$

welche also die Gleichungen der Normale des bestimmten Punktes  $B$  liefern in:

$$N) \quad \begin{cases} \xi - x = \frac{a'k - a}{c'k - c} \cdot (\xi - z) \\ \eta - y = \frac{b'k - b}{c'k - c} \cdot (\xi - z) \end{cases}$$

Diese setzen wir nun in die Gleichung der Ebene  $PBP'$ , multipliciren beiderseits mit  $(c'k - c)$  und kürzen durch  $(\xi - z)$  ab, so folgt:

$$(a'k - a) \cdot (bc' - b'c) + (b'k - b) \cdot (a'c - ac') + (c'k - c) \cdot (ab' - a'b) = 0.$$



wobei der Kürze halber der Ausdruck

$$\sqrt{(a'k-a)^2 + (b'k-b)^2 + (c'k-c)^2} = \sqrt{R}$$

gesetzt wurde.

Daraus erhalten wir direct:

$$\cos(s, s') = \cos \sigma = aa' + bb' + cc'$$

und weiters

$$\cos(N, s) = \cos \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{R}} [k(aa' + bb' + cc') - (a^2 + b^2 + c^2)] = \frac{1}{\sqrt{R}} (k \cos \sigma - 1)$$

$$\cos(N', s') = \cos \varrho = \frac{1}{\sqrt{R}} [k(a^2 + b^2 + c^2) - (aa' + bb' + cc')] = \frac{1}{\sqrt{R}} (k - \cos \sigma)$$

Durcheinander dividirt ergibt die Bedingung:

$$\frac{\cos \varepsilon}{\cos \varrho} = \frac{k \cos \sigma - 1}{k - \cos \sigma}$$

Aus Fig. 2., die uns den Vorgang der Richtungsänderung des Weges im Raume (Einfalls- und Brechungsebene) nun in der Zeichnungsebene versinnlicht, folgt unmittelbar:

$$\sigma = \varepsilon - \varrho.$$

Daher lautet unsere Bedingungsgleichung für die Richtungen:

$$(5) \quad \frac{\cos \varepsilon}{\cos \varrho} = \frac{k \cos(\varepsilon - \varrho) - 1}{k - \cos(\varepsilon - \varrho)}$$

Diese lässt sich nach Anwendung einiger goniometrischen Formeln wesentlich vereinfachen. Wir entwickeln:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \varepsilon + \cos \varrho}{\cos \varepsilon - \cos \varrho} &= \frac{k \cos(\varepsilon - \varrho) - 1 + k - \cos(\varepsilon - \varrho)}{k \cos(\varepsilon - \varrho) - 1 - k + \cos(\varepsilon - \varrho)} = \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1 + \cos(\varepsilon - \varrho)}{1 - \cos(\varepsilon - \varrho)} \\ &= \frac{2 \cos \frac{1}{2}(\varepsilon + \varrho) \cdot \cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \varrho)}{-2 \sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \varrho) \cdot \sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \varrho)} = \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2}(\varepsilon - \varrho)}{-2 \sin^2 \frac{1}{2}(\varepsilon - \varrho)} \cdot \frac{k-1}{k+1} \end{aligned}$$

oder abgekürzt:

$$\frac{k-1}{k+1} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(\varepsilon + \varrho) \cdot \sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \varrho)}{2 \sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \varrho) \cdot \cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \varrho)} = \frac{\sin \varepsilon - \sin \varrho}{\sin \varepsilon + \sin \varrho} = \frac{\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} - 1}{\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} + 1},$$

woraus endlich folgt:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} = k \quad (II)$$





die eine Schaar paralleler Schichten bilden (z. B. Glastafeln verschiedener Qualität und Dicke), und aus derselben in ein dem ursprünglichen gleiches Medium  $M$ , dann ist bezüglich der Schaar paralleler Schichten der Eintrittsstrahl  $S_e$  dem Austrittsstrahl  $S_a$  parallel.

Führt man die bekannten Bezeichnungen ein, so ergibt sich unmittelbar aus der Figur 5.:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho_1} = \frac{v}{v'}$$

$$\frac{\sin \varrho_1}{\sin \varrho_2} = \frac{v'}{v''}$$

$$\frac{\sin \varrho_2}{\sin \varrho_3} = \frac{v''}{v'''}.$$

$$\frac{\sin \varrho_3}{\sin \varrho} = \frac{v'''}{v}$$

und durch Multiplication dieser Gleichungen folgt endlich:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} = 1 \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon = \varrho$$

das ist soviel als  $S_a \parallel S_e$ . Der Parallelismus der Schichten ist durch die Bedingung hineingelegt worden, dass der Brechungswinkel für eine Schichte zum Einfallswinkel für die darauffolgende Schichte genommen wurde.

6) Wenn ein Lichtstrahl aus einem Medium  $M$  in ein ihm gleiches übertritt, so erfolgt offenbar keine Brechung, denn wegen  $v = v'$  folgt

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varrho} = 1 \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon = \varrho.$$

Der Strahl kann aber auch gezwungen werden, nachdem er  $F$  getroffen hat, in demselben Mittel zu verbleiben. Diess erfolgt dann, wenn  $F$  eine undurchdringliche, total spiegelnde Fläche ist. Es ist für diese Art Brechung auch

$$v = v'$$

also

$$\sin \varepsilon = \sin \varrho_1 = \sin(180 - \varrho_1)$$

daher

$$\varepsilon = \varrho_1.$$

Die Brechung geht in die totale Reflexion über und es ist dabei der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel, das bekannte Reflexionsgesetz des Lichtes. Es erfolgt also auch bei der Reflexion die Fort-





in jenes  $M_1$  bedeutet und für verschiedene  $M_1$  das  $M$  constant beibehalten bleibt. Durch die Geschwindigkeiten ausgedrückt, folgt:

$$k^2 - 1 = \frac{v^2}{v'^2} - 1.$$

Daraus ersieht man, dass für grössere  $v'$  bei constantem  $v$  der Ausdruck  $k^2 - 1$  kleiner wird und umgekehrt. Da nun im Allgemeinen einem dünneren Mittel eine grössere Durchgangsgeschwindigkeit entspricht und umgekehrt dem dichteren eine kleinere, so wird auch in der Regel dem dünneren Medium eine geringere brechende Kraft zukommen als dem dichteren. Diess gilt ausnahmslos für Medien von gleicher Beschaffenheit und verschiedener Dichte (z. B. Gase unter verschiedenem Drucke ausgesetzt).

9) Ist  $k$  die bekannte Grösse für die Medien  $M$  und  $M_1$  und  $D'$  die Dichte vom letzteren, dann heisst der Ausdruck  $\frac{k^2 - 1}{D'}$  das Brechungsvermögen des Mediums  $M_1$  in Bezug auf das constant beibehaltene  $M$ .

Das Brechungsvermögen ist nach empirischen Ermittlungen eine constante Grösse, wenn  $M$  unverändert bleiben,  $M_1$  aber nur in seiner Dichte  $D_1$  eine Aenderung erleiden soll.

Diess gibt uns ein Mittel an die Hand eine Beziehung zwischen der Dichte eines Mittels und der Geschwindigkeit des durchgehenden Lichtstrahles desselben aufzustellen.

Bedeutet:

$v$  die Geschwindigkeit des Lichtes im luftleeren Raume (Aether),

$v'$  jene im Mittel  $M_1$ ,

$D'$  die Dichte des Mittels  $M_1$ ,

$V$  das Brechungsvermögen von  $M_1$  in Bezug auf den luftleeren Raum, so wird:

$$\frac{\frac{v^2}{v'^2} - 1}{D'} = V$$

und daraus:

$$v' = \frac{v}{\sqrt{D' \cdot V + 1}}.$$

Sind  $v$ ,  $D'$  und  $V$  bekannt, so lässt sich aus Letzterem die Geschwindigkeit  $v'$  im Medium  $M_1$  rechnen.

Aendert  $M_1$  seine Dichte in  $D''$ , so bleibt, wie oben erwähnt, das



## XII.

## Beitrag zum Interpolationsproblem.

Von

**Carl Bartl.**

Die Aufgabe der Interpolation für eine Reihe gegebener Werte einer in ihrer Form unbekannten Function und ihrer entsprechenden Argumente besteht bekanntlich darin für beliebige zwischenliegende Werte dieser Argumente aus dem Gegebenen die zugehörigen Functionswerte auszumitteln. Stellt man die gegebenen Werte, Argumente und Functionen als Abscissen und Ordinaten von Punkten durch ein rechtwinkeliges Axensystem bildlich dar, so drückt sich unsere Aufgabe auch so aus, dass man sagt: Es sind für solche zwischen den gegebenen Abscissen liegenden Werte die zugehörigen Ordinaten jener Punkte zu bestimmen, welche in Bezug auf die aufgestellte Punktenfolge entsprechend eingeschaltet erscheinen.

Dieses Problem gehört in seiner allgemeinen Form offenbar zu den unbestimmten, unendlich viele Lösungen zulassenden. Dics geht auch aus der zweiten Auffassung direct hervor, indem sich durch jene dargestellte Punktenfolge beliebig viele Curven legen lassen, die für ein zwischen liegendes Argument (Abscisse) ebensoviele Functionswerte (Ordinaten von Curvenpunkten) liefern.

Sehr häufig wird nun in concreten Fällen jene Unbestimmtheit durch Bedingungen gehoben, die mit der Aufgabe mitgegeben erscheinen oder sich aus deren Natur ableiten lassen, so dass man von einer, für die praktischen Verhältnisse genügenden Lösung allerdings sprechen kann.







mit in Rechnung zu ziehen — was doch ebenso wesentlich zur möglichst richtigen Lösung gehören soll.

Im Folgenden soll nun an einem Beispiele die Lösung nach der Lagrange'schen Methode und jene nach dem oben vorgetragenen Verfahren vergleichsweise durchgeführt werden. Letztere insbesondere zu dem Zwecke, um zu zeigen, wie man sich in einem concreten Falle nach dieser, nur im Allgemeinen angegebenen Behandlungsart zu benehmen habe. Diess motivirt auch die etwas umständlichere Durchführung des sonst einfachen Falles.

### Beispiel.

„Nach der Verordnung des Handelsministeriums vom 13. Aug. 1870 betreffend die bei der Erbauung eiserner Brücken für Eisenbahnen zu beachtenden Sicherheitsrücksichten, hat nach § 2 derselben die zufällige Belastung ( $P$ ) gleichmässig verteilt per Meter laufenden Geleises zu betragen:

Bei einer Spannweite von	$S_1 = 1$	Meter	Belastung	$P_1 = 20$	Tonnen
„	$S_2 = 2$	„	$P_2 = 15$	„	
„	$S_3 = 5$	„	$P_3 = 10$	„	
„	$S_4 = 20$	„	$P_4 = 5$	„	
„	$S_5 = 30$	„	$P_5 = 4$	„	

und bei einer Spannweite von mehr als 30 Meter gleichfalls 4 Tonnen Belastung.

Für dazwischen fallende Tragweiten ist die nötige Interpolation vorzunehmen.“

Hier liegt ein Fall von Interpolation vor, bei welchen die gegebenen Argumentswerte in ungleichen Intervallen aufeinanderfolgen, denn wir haben die per Meter laufenden Geleises zu nehmende Belastung  $P$  als Function der Spannweite  $S$  anzusehen.

### 1. Lösung.

Nach der allgemeinen Lösungsmethode von Lagrange folgt für eine beliebige Spannweite  $S$  (zwischen den gegebenen Werten) die zu nehmende Belastung  $P$  per Meter (d. i. unser fraglicher Functionswert) ausgedrückt durch die Gleichung:

$$P = X_1 \cdot P_1 + X_2 \cdot P_2 + X_3 \cdot P_3 + X_4 \cdot P_4 + X_5 \cdot P_5$$

wobei die Coefficienten  $X$  die Spannweiten enthalten und beispielsweise einer derselben die Form hat:













## XIII.

## Miscellen.

## 1.

**Bemerkung über den Torsionshalbmesser von Raumcurven.**

Durch eine sehr einfache Betrachtung ist es möglich, den Quotienten aus Bogenelement und Torsionswinkel in irgend einem Punkt einer Raumcurve, dessen Grenzwert den Torsionshalbmesser in diesem Punkt liefert, geometrisch so umzuformen, dass man den analytischen Ausdruck dafür ohne Weiteres angeben kann. Ehe wir dies zeigen, müssen wir vorausschicken die Formeln für den Inhalt eines unendlich kleinen Dreiecks und eines unendlich kleinen Tetraeders, ausgedrückt durch die Coordinaten der (unendlich nahen) Eckpunkte. Wenn nämlich  $A, B, C$  drei unendlich wenig entfernte Punkte mit den auf ein beliebiges rechtwinkliges System bezogenen Coordinaten

$$x, y, z; \quad x+dx, y+dy, z+dz; \quad x+2dx+d^2x, y+2dy+d^2y, \\ z+2dz+d^2z$$

sind, so ist der doppelte Inhalt  $\Delta$  des Dreiecks  $ABC$  bekanntlich dargestellt durch

$$\Delta^2 = (1, y+dy, z+2dz+d^2z)^2 + (x, 1, z+2dz+d^2z)^2 + (x, y+dy, 1)^2,$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y+dy & y+2dy+d^2y \\ z & z+dz & z+2dz+d^2z \end{vmatrix} = (1, y+dy, z+2dz+d^2z)$$

u. s. w. gesetzt wurde.









$$\frac{p}{c} = \frac{2 \sin^2 \alpha \sin \beta \sin \vartheta}{\cos 2\alpha \cos \beta \cos \vartheta + \sin \beta \sin \vartheta}$$

$$\sin \mu = - \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha \cos \beta \cos \vartheta + \sin \beta \sin \vartheta}$$

Mittelst der Substitution

$$\cot \vartheta = \frac{\sin 2\alpha \sin \eta + \cos \beta}{\cos 2\alpha \sin \beta} \quad (2)$$

lässt sich ein sehr einfacher Ausdruck von  $E$  in der einzigen Variablen  $\eta$  gewinnen. Denn es wird

$$\cos 2\alpha \cos \beta \cos \vartheta + \sin \beta \sin \vartheta = \sin \vartheta \frac{1 + \sin 2\alpha \cos \beta \sin \eta}{\sin \beta}$$

daher

$$\frac{p}{c} = \frac{2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{1 + \sin 2\alpha \cos \beta \sin \eta} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \vartheta} = \frac{(1 + \sin 2\alpha \cos \beta \sin \eta)^2 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \beta \cos^2 \eta}{\cos^2 2\alpha \sin^2 \beta}$$

$$\sin^2 \mu = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\cos^2 2\alpha \sin^2 \beta}{(1 + \sin 2\alpha \cos \beta \sin \eta)^2}$$

$$= 1 - \frac{\sin^2 2\alpha \sin^2 \beta \cos^2 \eta}{(1 + \sin 2\alpha \cos \beta \sin \eta)^2}$$

das ist:

$$\cos \mu = \frac{\sin 2\alpha \sin \beta \cos \eta}{1 + \sin 2\alpha \cos \beta \sin \eta} \quad (4)$$

Diese Gleichung zeigt die Berechtigung der Substitution (2), sofern das reelle  $\cos \mu$  ein reelles  $\cos \eta$ , also  $\sin^2 \eta \leq 1$  fordert. Führt man die Werte (3) (4) in (1) ein, so erhält man:

$$E = R c^2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos^3 \alpha} \frac{1 + \sin 2\alpha \cos \beta \sin \eta}{\cos^3 \eta} \quad (5)$$

oder, abgekürzt:

$$E = N \frac{1 + n \sin \eta}{\cos^3 \eta}$$

wo

$$n = \sin 2\alpha \cos \beta$$

jeden Wert zwischen 0 und 1 haben kann.

Differentiirt man zweimal, so kommt:

$$\frac{\partial E}{\partial \eta} = N \frac{3 \sin \eta + n (2 \sin^2 \eta + 1)}{\cos^4 \eta}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} = 4 \operatorname{tg} \eta \frac{\partial E}{\partial \eta} + N \frac{3 + 4n \sin \eta}{\cos^3 \eta} \quad (6)$$

Erstere Grösse verschwindet für

$$\sin \eta = \frac{-3 \pm m}{4n}$$

wo

$$m = \sqrt{9 - 8n^2}$$

zwischen 1 und 3 enthalten ist. Hieraus ergibt sich:

$$\sin^2 \eta = \frac{1}{2} \frac{3 \mp m}{3 \pm m} = 1 \mp \frac{1}{2} \frac{m \pm 1}{3 \pm m}$$

$< 1$  für das obere,  $> 1$  für das untere Zeichen. Demnach hat allein der Wert

$$\sin \eta = \frac{m - 3}{4n}$$

Bedeutung, und dieser ergibt nach (6):

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} = \frac{Nm}{\cos^3 \eta} > 0$$

entspricht daher einem Minimum.

Nach Einsetzung der gefundenen Werte hat man:

$$\cot \theta = \frac{m - 3 + 4 \cos^2 \beta}{4 \cos 2\alpha \sin \beta \cos \beta} \quad (7)$$

$$\cos \eta = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1 + m}{3 + m}}; \quad \sin \eta = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{3 - m}{3 + m}} \quad (8)$$

$$\cos \mu = \operatorname{tg} \beta \sqrt{3 \frac{3 - m}{1 + m}} \quad (9)$$

$$p = \frac{8c \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{1 + m} \quad (10)$$

$$E = \frac{Rc^2}{3 \sqrt{6}} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos^3 \alpha} \frac{(3 + m)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + m}} \quad (11)$$

grosse Halbaxe

$$\frac{p}{\cos^2 \mu} = \frac{8c}{3} \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{3 - m} \quad (12)$$

kleine Halbaxe

$$\frac{p}{\cos \mu} = \frac{8c}{\sqrt{3}} \frac{\sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta}{\sqrt{(1 + m)(3 - m)}} \quad (13)$$





## 5.

Entwicklung von  $\log(1+x)$ .

Ich füge noch die Entwicklung von  $\log(1+x)$  in eine Reihe auf eine neue Weise hinzu, die mir deshalb wohl erwähnenswert zu sein scheint, weil sie ganz ohne den binomischen Lehrsatz gefunden wird.

Es sei

$$\log(1+x) = a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_1^{\infty} a_h x^h$$

also

$$\log(1+y) = a_1y + a_2y^2 + \dots = \sum_1^{\infty} a_h y^h$$

also

$$\log(1+x) - \log(1+y) = \log \frac{1+x}{1+y} = \sum_1^{\infty} a_h (x^h - y^h)$$

Nun ist

$$\frac{1+x}{1+y} = 1 + \frac{x-y}{1+y}$$

also

$$\log \left( \frac{1+x}{1+y} \right) = \log \left( 1 + \frac{x-y}{1+y} \right) = a_1 \frac{x-y}{1+y} + a_2 \left( \frac{x-y}{1+y} \right)^2 + \dots$$

Wir finden also

$$\sum_1^{\infty} a_h (x^h - y^h) = \sum_1^{\infty} a_h \left( \frac{x-y}{1+y} \right)^h$$

oder

$$\sum_1^{\infty} a_h \frac{x^h - y^h}{x-y} = \sum_1^{\infty} a_h \frac{(x-y)^{h-1}}{(1+y)^h}$$

Wir setzen nun  $x = y$ . Es ist aber

$$\lim \left( \frac{x^h - y^h}{x-y} \right)_{x=y} = h \cdot y^{h-1}$$

also

$$\sum_1^{\infty} h \cdot a_h \cdot y^{h-1} = \frac{a_1}{1+y}$$

da die übrigen Glieder der rechten Seite fortfallen. Es ist aber

$$\frac{a_1}{1+y} = a_1 \sum_0^{\infty} (-1)^h \cdot y^h = a_1 \sum_1^{\infty} (-1)^{h-1} \cdot y^{h-1}$$

Hieraus folgt also

$$h \cdot a_h = (-1)^{h-1} \cdot a_1$$

$$a_h = \frac{(-1)^{h-1} \cdot a_1}{h}$$

Der Coefficient  $a_1$  muss natürlich auf gewöhnliche Weise bestimmt werden.

Königsberg, d. 5. Jan. 1878.

W. Fuhrmann.

6.

**Ermittlung des Wertes eines bestimmten Integrales.**

Das zu berechnende Integral ist

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} \varphi(u) du \quad (1)$$

für den Fall, in welchem  $A$  und  $B$  positive Zahlen sind und  $\varphi(u)$  eine ganze algebraische Function von  $u$  bedeutet.

Führt man in dem obigen Integrale für  $u$  eine neue Variable  $w$  ein, mittelst der Substitution

$$u = \alpha + (\beta - \alpha)w \quad (2)$$

so erhält man

$$J = (\beta - \alpha)^{A+B-1} (-1)^{B-1} \int_0^1 w^{A-1} (1-w)^{B-1} \varphi[\alpha + (\beta - \alpha)w] dw \quad (3)$$

Setzt man der Kürze halber

$$A + B = s$$

$$\beta - \alpha = \gamma$$

und entwickelt man

$$\varphi(\alpha + \gamma w)$$

mittelst der Maclaurinischen Reihe, so erhält man:

$$J = (-1)^{B-1} \gamma^{s-1} \int_0^1 w^{A-1} (1-w)^{B-1} [\varphi(\alpha) + \gamma w \varphi'(\alpha) + \frac{\gamma^2 w^2}{2!} \varphi''(\alpha) + \frac{\gamma^3 w^3}{3!} \varphi'''(\alpha) + \dots] dw$$

Man kann diesen Ausdruck auch so schreiben:

$$J = (-1)^{B-1} \gamma^{s-1} \left\{ \varphi(\alpha) \int_0^1 w^{A-1} (1-w)^{B-1} dw + \gamma \varphi'(\alpha) \int_0^1 w^A (1-w)^{B-1} dw + \frac{\gamma^2}{2!} \varphi''(\alpha) \int_0^1 w^{A+1} (1-w)^{B-1} dw + \frac{\gamma^3}{3!} \varphi'''(\alpha) \int_0^1 w^{A+2} (1-w)^{B-1} dw + \dots \right\}$$

Nun ist bekanntlich für positive Werte von  $p$  und  $q$

$$\int_0^1 w^{p-1} (1-w)^{q-1} dw = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

gleich hat man:











































Diese Art der Ableitung von  $\sigma^{-1}s_\lambda\sigma$  aus  $s_\lambda$  heisst Transformation von  $s_\lambda$  durch  $\sigma$ ;  $\sigma^{-1}s_\lambda\sigma$  ist die Transformirte von  $s_\lambda$  durch  $\sigma$ . Wir wollen zeigen, dass die Transformirte  $\sigma^{-1}s_\lambda\sigma$  mit  $s_\lambda$  in der Zahl der Cyklen und der Zahl der Elemente jedes einzelnen Cyklus übereinstimmt, so dass man  $\sigma^{-1}s_\lambda\sigma$  aus  $s_\lambda$  erhält, indem man jedes Element von  $s_\lambda$  durch dasjenige ersetzt, welches  $\sigma$  darauf folgen lässt, und dass man also nach unserer ersten Bezeichnung schreiben könnte

$$\sigma^{-1}s_\lambda\sigma = \left( \begin{smallmatrix} \sigma \\ s_\lambda \end{smallmatrix} \right).$$

In der That, es mögen  $x_1, x_2, x_3, \dots$  einen Cyklus von  $s_\lambda$  bilden, und es möge  $\sigma$  die Elementenfolgen  $x_1x_{k_1}, x_2x_{k_2}, x_3x_{k_3}, \dots$  enthalten, wo, wenn z. B.  $x_2$  nicht in  $\sigma$  vorkommt,  $k_2 = 2$  zu setzen ist. Dann fñhrt  $\sigma^{-1}$  das Element  $x_{k_1}$  nach  $x_1$ ,  $s_\lambda$  fñhrt  $x_1$  nach  $x_2$  und  $\sigma$  fñhrt  $x_2$  in  $x_{k_2}$  über; es tritt daher an Stelle von  $x_1x_2$  jetzt  $x_{k_1}x_{k_2}$  u. s. w.

In gleicher Weise wie von transformirten Substitutionen sprechen wir auch von transformirten Gruppen, so dass z. B.  $\Phi_2$  die Transformirte von  $\Phi_1$  durch  $\sigma_2$  oder dass  $\Phi_2 = \sigma_2^{-1}\Phi_1\sigma_2$  ist.

So sahen wir, dass die Function

$$\varphi_1 = x_1x_2 + x_3x_4$$

drei Werte habe, und dass ihre Gruppe von der Ordnung 8 sei. Die Substitution  $\sigma = (x_1x_3)$  gehört nicht zu der Gruppe  $\Phi_1$  von  $\varphi_1$

$$\begin{aligned} &1, (x_1x_2); (x_3x_4); (x_1x_3)(x_2x_4); (x_1x_3x_2x_4); \\ &(x_1x_3)(x_2x_4); (x_1x_4)(x_2x_3); (x_1x_4x_2x_3); \end{aligned}$$

$\sigma$  wandelt  $\varphi_1$  in  $\varphi_\sigma = x_1x_4 + x_2x_3$  um; dasselbe tun alle  $s_\lambda\sigma$ , nämlich

$$\begin{aligned} &(x_1x_3); (x_1x_2x_3); (x_1x_3x_4); (x_1x_2x_3x_4); \\ &(x_2x_4x_3); (x_2x_4); (x_1x_4x_3x_2); (x_1x_4x_2). \end{aligned}$$

Diese 16 Substitutionen erschöpfen noch nicht alle 4! möglichen;  $\tau = (x_2x_3)$  gehört nicht zu denselben; man erhält  $\varphi_\tau = x_1x_3 + x_2x_4$  und die fehlenden 8 Substitutionen erhält man durch die  $s_\lambda\tau$ :

$$\begin{aligned} &(x_2x_3); (x_1x_3x_2); (x_2x_3x_4); (x_1x_3x_4x_2); \\ &(x_1x_2x_4); (x_1x_2x_4x_3); (x_1x_4); (x_1x_4x_3). \end{aligned}$$

## § 8.

Die Beweise der soeben aufgestellten Sätze beruhen darauf, dass wir alle überhaupt möglichen  $n!$  Substitutionen durch die Complexe von je  $r$  Substitutionen  $s_\lambda; s_\lambda s_\mu; s_\lambda s_\nu; \dots$  ( $\lambda = 1, \dots, r$ ) erschöpfen.

























Denn sind  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  die gegebenen Functionen, so hat für die willkürlichen aber allgemeinen Constanten  $\alpha$  die Function

$$\psi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \dots$$

als zugehörige Gruppe die grösste, welche zugleich in allen den Gruppen, welche zu  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  gehören, enthalten ist. Jedes  $\varphi$  bleibt daher für die Gruppe der obigen Summe unverändert und ist folglich rational durch sie darstellbar. Haben die Gruppen keine anderen gemeinsamen Substitutionen, so doch immer wenigstens die Einheit; in diesem Falle würde  $\psi$  die resolvirende Function der Elemente werden.

III. Jede alternirende Function  $\varphi$  ist in der Form

$$\varphi = R_1 + \sqrt[2]{R_2}$$

darstellbar, wo  $R_1$  und  $R_2$  rationale Functionen der symmetrischen elementaren Functionen der  $x$  sind.

Denn wenn  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  die beiden Werte von  $\varphi$  sind, und man setzt

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2R_1, \quad \varphi_1 \cdot \varphi_2 = R',$$

so wird  $R_1$  wie  $R'$  symmetrisch. Ausserdem ist

$$\varphi^2 - 2R_1\varphi + R' = 0;$$

$$\varphi = R_1 + \sqrt[2]{R_1^2 - R'} = R_1 + \sqrt[2]{R_2}.$$

Nun bestehen nach § 6. II. wirklich Functionen  $\varphi$  die nur zweiwertig sind, und daher giebt es auch stets zweiwertige Functionen  $\varphi - R_1$  der  $x_1, \dots, x_n$ , deren Quadrate symmetrisch in den  $x$  werden, und deren beide Werte sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Die einfachste dieser Functionen ist das in § 6. II. gebildete Product aus den Wurzeldifferenzen  $\psi = \Pi(x_\lambda - x_\mu)$ , ( $\lambda > \mu$ ).

IV. Wir wollen jetzt untersuchen, ob es vielleicht noch andere Functionen  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  ausser den eben angeführten giebt, welche in den  $n$  Elementen  $x_1, \dots, x_n$  nicht symmetrisch sind, bei denen aber eine Primzalpotenz  $\varphi^p(x_1, \dots, x_n)$  symmetrisch in den  $x$  wird.

In diesem Falle hätte man

$$\varphi^p(x_1, x_2, \dots, x_n) = G(a_1, \dots, a_n)$$

also

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[p]{G(a_1, \dots, a_n)}.$$



$$\varphi_\sigma = \varepsilon \cdot \varphi_1,$$

wo  $\varepsilon$  eine von 1 verschiedene Wurzel der Gleichung  $x^p = 1$  ist. Diese Gleichung zwischen den  $n$  von einander unabhängigen Elementen  $x_1, \dots, x_n$  ist, wie alle unsere früheren eine Identität. Sie bleibt also bestehen, wenn man in ihr die Substitution  $\sigma$  noch einmal ausführt; es ist also auch

$$\varphi_{\sigma^2} = \varepsilon \varphi_\sigma = \varepsilon^2 \varphi_1$$

und daher in gleicher Weise

$$\varphi_{\sigma^3} = \varepsilon^3 \varphi_1, \dots, \varphi_{\sigma^\lambda} = \varepsilon^\lambda \varphi_1, \dots, \varphi_{\sigma^q} = \varepsilon^q \varphi_1.$$

$\sigma^q$  gehört der Annahme nach zu  $\Phi$ , folglich bleibt  $\varphi$  für die Substitution  $\sigma^q$  ungeändert und es ist

$$\varphi_{\sigma^q} = \varphi_1 = \varepsilon^q \varphi_1;$$

$$\varepsilon^q = 1.$$

$\varepsilon$  ist eine  $p$ te Einheitswurzel,  $q$  ist eine Primzahl; folglich wird  $q = p$  sein müssen;  $\sigma^p$  ist die niedrigste Potenz von  $\sigma$ , welche in  $\Phi$  vorkommt; die aus  $\Phi$  und  $\sigma$  gebildete Gruppe enthält daher mindestens  $p$ mal so viele Substitutionen als  $\Phi$ . Sie ist aber auch in  $\Psi$  enthalten, und dies hat genau  $p$ mal mehr Substitutionen als  $\Phi$ ; folglich ist

$$\Psi = [\Phi, \sigma].$$

Nach den Ausführungen von § 4. ist dies nur möglich, wenn für alle Substitutionen  $s_1, \dots, s_r$  von  $\Phi$

$$s_\lambda \cdot \sigma = \sigma \cdot s_\mu,$$

wenn also

$$\sigma^{-1} s_\lambda \sigma = s_\mu;$$

$$\sigma^{-1} \Phi \sigma = \Phi; \quad \sigma^{-2} \Phi \sigma^2 = \Phi; \quad \sigma^3 \Phi \sigma^3 = \Phi; \dots,$$

d. h. wenn  $\sigma$  zu  $\Phi$  permutabel ist. Nun bleiben die Werte, welche  $\varphi = \varphi_1$  überhaupt annehmen kann,

$$\varphi_1, \varphi_\sigma, \varphi_{\sigma^2}, \dots, \varphi_{\sigma^{p-1}}$$

bezüglich für die Gruppen

$$\Phi, \sigma^{-1} \Phi \sigma, \sigma^{-2} \Phi \sigma^2, \dots, \sigma^{-p+1} \Phi \sigma^{p-1}$$

ungeändert; diese sind sämtlich gleich  $\Phi$ . Es bleiben folglich alle Werte  $\varphi_1, \dots, \varphi_{\sigma^{p-1}}$  für dieselbe Gruppe  $\Phi$  ungeändert und daher lassen sie sich sämtlich als rationale Functionen von  $\varphi$  darstellen.

Als notwendige Bedingung dafür, dass die  $p$ te Potenz einer Function  $\varphi$  von  $p \cdot \varphi$  Werten nur  $\varphi$ -wertig sei, haben wir also gefunden,















































die moralische Hoffnung übergeht hier in die Furcht, 0.25 resp. 0.131 seines Vermögens zu verlieren.

β) Betrachtet man irgend ein Spiel, bei welchem die Einsätze nach den Regeln der mathematischen Hoffnung geordnet sind, welches also mathematisch gleich ist, so kann leicht erwiesen werden, dass es für jeden der Mitspielenden moralisch nachteilig ist.

Gesetzt,  $v$  sei der Einsatz eines Spielers  $A$ ,  $w$  die Wahrscheinlichkeit für ihn, zu gewinnen, also  $1-w$  jene für das Verlieren, so ist  $\frac{v(1-w)}{w}$  der rechtmässige Einsatz des Gegners  $B$  oder der Gewinn, welchen  $A$  zu erwarten hat. Die moralische Hoffnung für  $A$  ist, der ersten Annahme zufolge,

$$-\frac{\frac{v(1-w)}{w}}{1 + \frac{v(1-w)}{w}} w - 1 - \frac{v}{1-v} (1-w) = -\frac{v^2(1-w)}{\{w + v(1-w)\}(1-v)},$$

also negativ, übergeht daher in Furcht und der dieser entsprechende physische Geldbetrag ist

$$-v \frac{v(1-w)}{v(1-w) + w(1-v)}.$$

Nach der anderen Annahme ergibt die Rechnung die moralische Hoffnung im Betrage

$$wl \left( 1 + \frac{v(1-w)}{w} \right) + (1-w) l(1-v) \\ = -(1-w) \int_0^1 \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1 + \frac{1-w}{w} x} \right) dx,$$

also gleichfalls negativ, weil der Wert des Integrals unter der Bedingung  $v < 1$  positiv bleibt; der entsprechende physische Geldwert ist

$$- \left( 1 - \left( 1 + \frac{v(1-w)}{w} \right)^w \cdot (1-v)^{1-w} \right).$$

γ) Wagt jemand einen Betrag  $v$ , um im günstigen Falle einen gleich grossen zu gewinnen, und ist  $w_1$  die Wahrscheinlichkeit, die er für das Gewinnen,  $w_1'$  jene, die er für das Verlieren hat, so befindet er sich moralisch weder im Vor- noch im Nachteile, wenn  $v_{51} = 0$ , d. h. wenn



so reducirt sich die moralische Erwartung der betreffenden Person auf die Nulle, wenn

$$\frac{v''}{1+v} = \frac{v_1'''}{1-v_1};$$

aus dieser Relation kann bei gegebenem  $v$  und  $v_1$  das erforderliche  $''$  und  $'''$  berechnet werden; man findet

$$'' = \frac{v_1(1+v)}{v+v_1}$$

13)

$$''' = \frac{v(1-v_1)}{v+v_1};$$

während also für das Verschwinden der mathematischen Erwartung  $\frac{''}{'''} = \frac{v_1}{v}$  sein müsste, ist hier  $\frac{''}{'''} = \frac{v_1(1+v)}{v(1-v_1)}$ , d. h. die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens fällt grösser, jene des Verlierens kleiner aus als dort.

Die Gleichung kann auch dazu verwendet werden, bei gegebenen Wahrscheinlichkeiten Beziehungen zwischen Gewinn und Verlust herzustellen; dieselben lauten:

$$v = \frac{v_1'''}{''-v_1} = \frac{v_1'''}{''} \cdot \frac{1}{1-\frac{v_1}{''}}$$

14)

$$v_1 = \frac{v''}{''' + v} = \frac{v''}{'''} \cdot \frac{1}{1 + \frac{v}{'''}}$$

in diesen Ausdrücken sind  $\frac{v_1'''}{''}$  und  $\frac{v''}{'''}$  die durch die Parität der mathematischen Erwartungen geforderten Beträge und man erkennt, dass für den gegenwärtigen Fall der Gewinn grösser, der Verlust kleiner gefordert wird als dort.

Legt man die andere Annahme zu Grunde, so findet man durch Lösung der Gleichung

$$''l(1+v) = -'''l(1-v_1)$$

in analoger Weise wie vorhin:

$$'' = \frac{-l(1-v_1)}{l(1+v) - l(1-v_1)}$$

13')

$$''' = \frac{l(1+v)}{l(1+v) - l(1-v_1)};$$













XVII.

**Propriétés relatives des polyèdres réguliers,  
qui sont conjugués entre eux.**

Par

**Georges Dostor.**

---

1. Dans le Tome LIX, 1876, de ces Archives, nous avons fait connaître quelques propriétés nouvelles des polyèdres réguliers (pages 50 à 58), qui reposent sur l'introduction, dans les calculs, du rayon de la sphère tangente aux arêtes.

A' la fin de notre article (pages 57 et 58) nous avons trouvé que, si deux polyèdres réguliers conjugués sont inscrits dans la même sphère, leurs volumes sont entre eux comme les rayons des deux sphères, qui sont tangentes aux arêtes de nos deux polyèdres.

Nous avons été conduit à ce résultat par la comparaison des valeurs numériques, que nous avons obtenues pour ces volumes et pour les rayons des deux sphères.

Or cette proposition n'est que la conséquence d'un théorème général qui s'applique aussi aux polyèdres réguliers conjugués, lorsque ceux-ci sont étoilés.

Pour établir ce théorème et l'appliquer aux volumes, nous conserverons les notations de l'article cité et nous ferons usage de la même figure, que le lecteur est prié de construire.

2. **Théorème général.** Lorsque deux polyèdres réguliers, convexes ou étoilés, sont conjugués entre eux, les



$$1 = \sin^2 \frac{q\pi}{n} + \cos^2 \frac{q\pi}{n} = \sin^2 \frac{p\pi}{m} + \cos^2 \frac{p\pi}{m};$$

donc les premiers le sont aussi, et il vient

$$\cot I \cdot \cos \frac{p\pi}{m} = \cot I' \cdot \cos \frac{q\pi}{n},$$

d'où l'on tire la proportion

$$(I) \quad \frac{\cot I}{\cot I'} = \frac{\cos \frac{q\pi}{n}}{\cos \frac{p\pi}{m}},$$

qu'il fallait établir.

Si les polyèdres réguliers sont convexes, on aura

$$q = 1, \quad p = 1;$$

et par suite

$$(II) \quad \frac{\cot I}{\cot I'} = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{m}}.$$

3. Volume d'un polyèdre régulier convexe en valeur des rayons des trois sphères. Soit  $a$  l'arête d'un polyèdre régulier convexe de  $F$  faces ayant chacune  $n$  côtés et  $s$  le rayon de la sphère inscrite. Nous avons trouvé (page 56, loc. cit.), que le volume  $V$  du polyèdre est

$$(III) \quad V = \frac{1}{12} n F a^2 r \cot \frac{\pi}{n}.$$

Représentons par  $R$  le rayon de la sphère circonscrite, par  $\rho$  celui de la sphère tangente aux arêtes, nous avons (même page)

$$a = 2R \cot \frac{\pi}{m} \cot I,$$

$$a = 2\rho \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\cos \frac{\pi}{n}} \cot I,$$

où  $m$  désigne le nombre des arêtes issues de chaque sommet et  $I$  la demi-inclinaison mutuelle des faces adjacentes.

Le produit de ces deux valeurs de  $a$  sera





$$\cos \frac{\pi}{m} \cot I = \cos \frac{\pi}{n} \cot I;$$

donc il reste

$$V) \quad \frac{r}{r'} = \frac{S}{S'}.$$

Ainsi, Lorsque deux polyèdres réguliers sont con-  
jugués, s'ils se trouvent inscrits dans une même sphè-  
re, leurs valeurs seront entre eux comme les rayons  
des sphères tangentes aux arêtes.

Il s'ensuit que leurs surfaces sont dans le même rap-  
port.

Paris, 10 novembre 1877.

## XVIII.

### Nouvelle Méthode pour déterminer les foyers des Courbes du second degré.

Par

**Georges Dostor.**

1. Dans cette méthode, on a besoin de connaître les Con-  
ditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynôme  
entier du second degré à deux variables soit un carré.

Considérons d'abord le polynôme

$$(1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + 1$$

dans lequel le terme constant est égal à l'unité. Pour que ce poly-  
nôme soit un carré, il faut et il suffit que sa racine soit de la forme

$$mx + ny + 1.$$







soit positif. Si nous remplaçons  $B$  par  $\sqrt{AC}$ , les deux équations précédentes se réduiront à

$$\alpha\sqrt{A} - \beta\sqrt{C} = \frac{DE - F\sqrt{AC}}{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}},$$

$$\alpha\sqrt{C} + \beta\sqrt{A} = -\frac{(D^2 - AF) - (E^2 - CF)}{2(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})},$$

qui représentent deux droites rectangulaires, dont l'intersection sera précisément le foyer de notre parabole (3).

4. Multiplions les équations (III) et (IV) respectivement par  $A - C$  et  $B$ , et retranchons le premier produit du second; nous aurons éliminé  $f(\alpha, \beta)$ , et l'équation résultante sera

$$(VII) \quad Bf_{\alpha}^2 - (A - C)f_{\alpha}'f_{\beta}' - Bf_{\beta}' = 0.$$

Si, dans cette équation, nous regardons  $\alpha$  et  $\beta$  comme les coordonnées courantes, elle représentera une conique qui passe par les foyers de la courbe du second degré (3).

Mais cette équation (VII) est précisément l'équation aux axes de la conique (3). Donc

Les foyers d'une courbe du second degré sont situés sur les axes de la courbe.

5. Détermination de l'équation aux axes des courbes du second degré, rapportées à des coordonnées rectangulaires. Il est facile de faire voir que l'équation

$$(VIII) \quad Bf_x'^2 - (A - C)f_x'f_y' - Bf_y = 0$$

fournit les deux axes de la conique (3).

Soient en effet  $m$  et  $m'$  les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués de la conique (3). Le diamètre conjugué à la direction  $m$  étant

$$(10) \quad f_x' + m f_y' = 0,$$

ou

$$Ax + By + D + m(Bx + Cy + E) = 0,$$

il vient

$$m' = -\frac{A + mB}{B + mC}.$$

On a donc, entre  $m$  et  $m'$ , la relation

$$(11) \quad A + B(m + m') + Cmm' = 0.$$



nous pourrons éliminer d'abord  $m'$  entre les équations (13), (14) et (15), ce qui nous fournit les deux équations

$$\begin{aligned} m(Cf_x' - Bf_y') &= Af_x' - Bf_y', \\ m(f_x' - \cos \theta f_y') &= f_y' - \cos \theta f_x', \end{aligned}$$

qu'il suffit de diviser membre à membre pour avoir l'équation aux axes

$$\frac{Af_x' - Bf_y'}{f_y' - \cos \theta f_x'} = \frac{Cf_x' - Bf_y'}{f_x' - \cos \theta f_y'},$$

ou

$$(X) \quad (B - C \cos \theta) f_x'^2 - (A - C) f_x f_y' - (B - A \cos \theta) f_y'^2 = 0.$$


---

## XIX.

## Bewegung eines am Faden hangenden Stabes.

Von

**R. Hoppe.**

Ein Faden, d. i. eine gewichtlose, undeformbare Gerade, sei in einem Eckpunkt fest und trage am andern einen Stab, d. i. eine starre Gerade mit beliebig verteilter Masse. Der Befestigungspunkt am Stabe sei beliebig, nur soll er nicht dessen Schwerpunkt sein. Auf den Stab wirke allein die Schwere. Im Folgenden sollen einige Fragen in Betreff seiner Bewegung untersucht werden.

## §. 1. Allgemeine Differentialgleichungen der Bewegung.

Der feste Endpunkt  $O$  des Fadens  $OE = a$  sei Anfang der rechtwinkligen  $xyz$ , die  $x$  vertical nach unten gerichtet, das andre Ende  $E$  Anfang der Abscissen  $u$  längs dem Stabe, positiv nach dem Schwerpunkt  $F$  hin. Ist  $\delta m$  ein Element der Masse  $m$  im Punkte  $u$ , so möge sein

$$\int u \delta m = bm; \quad \int u^2 \delta m = bcm$$

die Integrale über den ganzen Stab ausgedehnt.

Für die Folge wird die Bemerkung notwendig sein, dass stets

$$c > b$$

ist. Dies erhellt leicht, wenn man die Massenelemente  $m_1, m_2, m_3, \dots$  in unendlich nahen Punkten  $u_1, u_2, u_3, \dots$  concentrirt denkt. Dann ist

$$bm = b \sum m_k = \sum u_k m_k$$

$$bcm = bc \sum m_k = \sum u_k^2 m_k$$



daher

$$\begin{aligned} h(c-b)m^2 &= \sum m_k \sum u_k^2 m_k - (\sum u_k m_k)^2 \\ &= \sum u_k^2 m_k^2 + \sum \sum (u_k^2 + u_h^2) m_k m_h \\ &\quad - (\sum u_k^2 m_k^2 + \sum \sum 2u_k u_h m_k m_h) \\ &= \sum \sum (u_k - u_h)^2 m_k m_h > 0. \end{aligned}$$

w. z. h. w.

Sind  $x_1 y_1 z_1$  die Richtungscosinus des Fadens,  $x_2 y_2 z_2$  die des Stabes, so sind die Coordinaten des Stabelements

$$\begin{aligned} x &= ax_1 + ux_2 \\ y &= ay_1 + uy_2 \\ z &= az_1 + uz_2 \end{aligned}$$

Von den Bewegungsgleichungen sind zwei Integrale bekannt, die Gleichung der constanten Flächengeschwindigkeitsprojection

$$\int (yz' - zy') \hat{c} m = Hm$$

und die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\int (x'^2 + y'^2 + z'^2) \partial m - 2g \int x \hat{c} m = 2Km \quad (1)$$

wo der Accent die Differentiation nach der Zeit ausdrückt.

Aus der letztern lassen sich leicht die 4 unabhängigen Differentialgleichungen 2. Ordnung durch partielle Differentiation ableiten, die aus den 6 Bewegungsgleichungen eines starren Systems auszusondern eine sehr umständliche Rechnung erfordern würde.

Setzt man

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \varphi & x_2 &= \cos \lambda \\ y_1 &= \sin \varphi \cos \psi & y_2 &= \sin \lambda \cos \mu \\ z_1 &= \sin \varphi \sin \psi & z_2 &= \sin \lambda \sin \mu \end{aligned}$$

so sind  $\varphi, \psi, \lambda, \mu$  die 4 unabhängig variirenden topischen Grössen, so dass, wenn man das Differential der Gl. (1) in der Form

$$\delta K =: \Phi \partial \varphi + \Psi \partial \psi + \mathcal{A} \partial \lambda + M \partial \mu$$

darstellt, und zwar nach Anleitung des Alembert'schen Principis

$$\frac{\partial x'^2}{\partial \varphi} = 2x'' \frac{\partial x}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial x'^2}{\partial \psi} = 2x'' \frac{\partial x}{\partial \psi} \text{ etc.}$$

setzt,

$$\Phi = 0; \quad \Psi = 0; \quad \mathcal{A} = 0; \quad M = 0$$

die 4 unabhängigen Gleichungen sind, die  $\varphi, \psi, \lambda, \mu$  bestimmen. Man findet, wenn zur Abkürzung  $\psi - \mu = \delta$  gesetzt wird:







$$q = \frac{k}{(hk+1)(h-k)} \left( \frac{h^2}{p-1} - 1 \right)$$

$$pq = \frac{k}{(hk+1)(h-k)} \left( \frac{h^2}{p-1} + h^2 - p \right)$$

ist, so erhellet, dass  $q$  und  $pq$  beständig abnehmen, wenn  $p$  wächst; gleichzeitig muss dann auch  $\sin^2 \varphi$  beständig abnehmen; daher entspricht jedem  $\varphi$  nur ein  $p$ , und es genügt, die äussersten Werte von  $p$ , bestimmt durch

$$pq = 1 \quad (\varphi = 0), \quad q = 1 \quad (\varphi = R)$$

zu entwickeln. Diese Gleichungen lauten nach (9) (oberes Zeichen):

$$kp(h^2+1-p) = (hk+1)(h-k)(p-1) \quad (\text{grösstes } p)$$

$$k(h^2+1-p) = (hk+1)(h-k)(p-1)$$

oder

$$\left( hk - k + h \frac{1-k^2}{2} \right)^2 = \left( h \frac{1+k^2}{2} \right)^2$$

$$(hk+1-k^2)p = hk+1$$

Die erste hat nur eine positive Wurzel:

$$p = hk+1 \quad \text{für} \quad \varphi = 0 \quad (12)$$

die andere giebt:

$$p = \frac{hk+1}{hk+1-k^2} \quad \text{für} \quad \varphi = R \quad (13)$$

Dem entsprechen die Werte:

$$q = \frac{1}{hk+1} \quad \text{für} \quad \varphi = 0 \quad (14)$$

$$q = \frac{h^2k+h+k}{k(hk+1)} = \frac{h}{k} + \frac{1}{hk+1} \quad \text{für} \quad \varphi = R \quad (15)$$

ferner nach (11) (oberes Zeichen):

$$\begin{aligned} \frac{g}{\mu'^2} &= a + bp = \frac{b}{k}(hk+1)(h-k) + b(hk+1) \\ &= bh \frac{hk+1}{k} \quad \text{für} \quad \varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{g}{\mu'^2} = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = R$$

oder

$$\mu' = \sqrt{\frac{g}{bh} \frac{k}{hk+1}} \quad (\varphi = 0); \quad \mu' = \infty \quad (\varphi = R) \quad (16)$$



Vergleicht man die untern Grenzen (17) (18), so ergibt sich:

$$\frac{h-k}{k} - \left( \frac{h^2 k}{(hk+1)(h-k)} - k - 1 \right) = \frac{h(hk+1)(h-2k)}{k\{(hk+1)(h-k) - k\}}$$

Hiernach wird  $p$  durch (17) oder (18) begrenzt, je nachdem  $k <$  oder  $> \frac{1}{2}h$  ist. Diese 2 Fälle sind zu trennen.

$$1) \quad k < \frac{1}{2}h.$$

Die Bedingung  $a > b$ , das ist

$$(hk+1)(h-k) - k = (hk+1)(h-2k) + hk^2 > 0$$

ist ohne Weiteres erfüllt;  $\varphi$  variirt von 0 bis  $\varphi_0$ ,  $\lambda$  von 0 bis  $R$ . Der Wert  $\varphi_0$  wird jedoch schon erreicht und überschritten, ehe  $p = \infty$  wird.

Stellt man nämlich den Ausdruck (10) in der Form

$$\sin^2 \varphi = \left\{ \frac{k}{(hk+1)(h-k)} \right\}^2 (1+P) = \sin^2 \varphi_0 (1+P)$$

dar, so ist die Grösse

$$P = \frac{2h^2 p^2 \left( 2 + \frac{h^2}{p+1} \right) - \frac{a^2}{h^2} + 1}{p^2 - 1} \quad (19)$$

für  $\varphi = 0$ , das ist für das kleinste  $p$ ,  $= -1$ , dagegen wird für  $p = \infty$  der Zähler  $= \infty$ ; folglich muss, für irgend ein  $p = p_1$ ,  $P$  verschwinden und für hinreichend grosse  $p$  positiv werden. Es folgt dann, dass

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 \text{ für } p = p_1 \text{ und für } p = \infty$$

und

$$\sin \varphi > \sin \varphi_0 \text{ für } p > \text{irgend ein } p_0 \stackrel{=}{>} p_1$$

hieraus wieder, dass  $\sin \varphi$  für irgend einen Wert  $p = p_2 > p_0$  ein Maximum hat.

Die Gleichungen, welche  $p_1$ ,  $p_0$ ,  $p_2$  bestimmen, sind vom 3. Grade; nämlich jede Wurzel der Gleichung

$$h^2 p^2 (2p + 2 + h^2) - \left( \frac{a^2}{h^2} - 1 \right) (p + 1)^2 = 0 \quad (20)$$

innerhalb der Grenzen der  $p$  ist ein Wert von  $p_1$ , die grösste unter ihnen ist  $= p_0$ . Ferner ergibt die Differentiation von (10):

$$\partial \sin^2 \varphi = \frac{h^2}{a^2} \frac{2p \partial p \cdot Q}{(p^2 - 1)^2 (p + 1)^2}$$

wo











Integriert man die in diesem Sinne irgend eine zeitlang dauernden Gl. (31), so sind die Integrale von der Form:

$$\varphi = \Sigma A c^{\alpha t}; \quad \lambda = \Sigma B c^{\alpha t}$$

Nach Einsetzung ergeben sich zur Bestimmung der  $\alpha$  die 2 Gleichungen:

$$A \left( \alpha^2 - \mu'^2 + \frac{g}{a} \frac{1 + h^2}{h^2} \right) = B \frac{g \cos \delta}{a h^2}$$

$$B \left( \alpha^2 - \mu'^2 + \frac{g}{b h^2} \right) = A \frac{g \cos \delta}{b h^2}$$

woraus nach Elimination von  $A, B$ :

$$\left( \alpha^2 - \mu'^2 + \frac{g}{a} \frac{1 + h^2}{h^2} \right) \left( \alpha^2 - \mu'^2 + \frac{g}{b h^2} \right) = \frac{g^2 \cos^2 \delta}{a b h^4}$$

Setzt man

$$\sin \eta = \frac{2k \sin \delta}{h(1 + k^2)} \sqrt{\frac{a}{b}}$$

so ergibt die Auflösung:

$$\alpha^2 = \mu'^2 - g \frac{2hk + 1 - k^2 \pm (1 + k^2) \cos \eta}{2bh(hk + 1)(h - k)}$$

Da

$$\cos^2 \eta = \frac{\{h(1 - k^2) - 2k^2\}^2 + 4k(hk + 1)(h - k) \cos^2 \delta}{h^2(1 + k^2)^2}$$

so ist  $\eta$  stets reell; folglich sind von den 4 Wurzeln  $\alpha$  entweder 2 positiv und 2 negativ oder 1 positiv und 1 negativ reell oder keine reell. In den ersten beiden Fällen haben  $\varphi$  und  $\lambda$  Terme, welche beständig wachsen, im letzten sind alle Terme periodisch, so dass  $\varphi$  und  $\lambda$ , wenn sie anfänglich unendlich klein waren, es beständig bleiben. Der letzte Fall ist es also, in welchem die verticale Lage stabil ist.

Demnach lautet für gegebenes  $\delta$  die Bedingung der Stabilität:

$$\mu'^2 < g \frac{2(h - k)k + (1 + k^2)(1 - \cos \eta)}{2bh(hk + 1)(h - k)}$$

Da aber  $\delta$  willkürlich ist, so findet die Stabilität erst statt, wenn die Bedingung für alle  $\eta$ , das ist für  $\eta = 0$ , entsprechend  $\sin \delta = 0$  erfüllt ist, wo sie lautet:

$$\mu'^2 < \frac{gk}{bh(hk + 1)}$$

Nach §. 2. war die Bedingung permanenter Rotation um die Verticale für  $\varphi > 0$  bei divergirendem Stabe

$$\mu'^2 > \frac{gk}{bh(hk+1)} \quad (33)$$

bei convergirendem Stabe

$$\mu'^2 > \frac{g}{bh(h-k)}; \quad a > b \quad (34)$$

Daher beginnt bei divergirendem Stabe die Möglichkeit permanenter Rotation genau da, wo die Stabilität der verticalen Lage aufhört. Bei convergirendem Stabe hingegen bleibt das Intervall

$$\frac{g}{bh\left(h+\frac{1}{k}\right)} < \mu'^2 < \frac{g}{bh(h-k)}$$

übrig, wo weder die verticale Lage stabil ist, noch eine permanente Rotation stattfinden kann. Es ist also nur denkbar, dass wenn der Stab bei vermehrter Rotation über die Grenze (33) hinaus aus der verticalen Lage in eine convergente übergeht, dies durch Vermittelung einer windschiefen Lage, wo  $\delta$  nicht null ist, geschieht.

Die Anfangswerte von  $\varphi$ ,  $\delta$  scheinen hiernach dem Zufall überlassen. Dass, wie es, wenigstens für  $a > b$ , der Erfahrung gemäss ist, der hinreichend schnell rotirende verticale Stab nie in die divergente Lage ausweicht, sondern nach äusserst kurzer Zeit in convergenter Lage, anscheinend permanent, rotirt, wird durch die vorstehende, bloss statische Untersuchung nicht erklärt und lässt sich offenbar auf statischem Wege nicht erklären.

## XX.

# Die geschlossene Form der periodischen Kettenbrüche.

Von

Herrn **K. E. Hoffmann**,  
Gymnasiallehrer in Zweibrücken.

Im 55ten Teil (Abhandl. XXXIII.) dieser Zeitschrift hat Herr Günther die Darstellung eines zweigliederig periodischen Kettenbruches in geschlossener Form dadurch gegeben, dass er denselben auf einen einfach periodischen reducirte, dessen geschlossene Form bereits bekannt war.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass sich jeder periodische Kettenbruch auf einen einfach periodischen zurückführen und folglich in geschlossener Form angeben lässt.

Ehe wir an die Lösung dieser Aufgabe gehen, wollen wir noch einige der wichtigsten Eigenschaften der sogenannten Kettenbruchdeterminante angeben. Bezeichnet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ -1 & z_2 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & -1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & -1 \end{vmatrix} z_n$$

mit  $D_{1,n}$ , wobei also die Indices von  $D$  den ersten und letzten Index der Glieder der Diagonalreihe angeben, so ist bekanntlich der Kettenbruch:

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n}}.$$

Durch Entwicklung der Determinante nach Elementen der ersten und letzten Reihe ergeben sich zunächst die Recursionsformeln:

$$1) \quad D_{1,n} = z_1 D_{2,n} + D_{3,n}$$

$$2) \quad D_{1,n} = z_n D_{1,n-1} + D_{1,n-2};$$

ferner durch Zerlegung der Determinante in Producte von partialen Determinanten  $s$ ten und  $(n-s)$ ten Grades:

$$3) \quad D_{1,n} = D_{1,s} D_{s+1,n} + D_{1,s-1} D_{s+2,n};$$

ferner mittelst wiederholter Anwendung der 1)

$$4) \quad D_{2,n} D_{1,n-1} - D_{2,n-1} D_{1,n} = (-1)^{n-1},$$

das bekannte Gesetz, welchem die Zähler und Nenner der Näherungswerte eines Kettenbruches genügen.

Endlich wollen wir noch angeben, welchen Wert  $D_{1,n}$  annimmt, wenn sämtliche Elemente der Diagonalreihe einander gleich ( $= z$ ) werden; wir setzen in diesem Falle die Determinante  $= D_n$  und erhalten aus 1)

$$D_n = z D_{n-1} + D_{n-2};$$

setzt man nun  $D_n = x^n$ , so folgt nach Division mit  $x^{n-2}$

$$x^2 = zx + 1$$

und daraus:

$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 + 4}}{2};$$

bezeichnet man die beiden Wurzeln der Gleichung mit  $x_1$  und  $x_2$ , wobei die Quadratwurzel in  $x_1$  das positive Zeichen haben soll, so ist die vollständige Lösung:

$$D_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n;$$

Die Constanten  $c_1$  und  $c_2$  bestimmen sich aus den Bedingungen  $D_0 = 1$ ;  $D_1 = z$ ; man findet:

$$c_1 = \frac{x_1}{\sqrt{z^2 + 4}} \quad \text{und} \quad c_2 = -\frac{x_2}{\sqrt{z^2 + 4}},$$

folglich:







$$13) \quad Z_r = D_{2,nr} \quad \text{und} \quad N_r = D_{1,nr};$$

Zerlegt man nun  $D_{2,nr}$  und  $D_{1,nr}$  in Producte von partialen Determinanten  $n$ ten und  $n(r-1)$ ten Grades, so findet man nach 3)

$$\begin{aligned} D_{2,nr} &= D_{2,n} D_{n+1,nr} + D_{2,n-1} D_{n+2,nr} \\ D_{1,nr} &= D_{1,n} D_{n+1,nr} + D_{1,n-1} D_{n+2,nr} \end{aligned}$$

oder, da  $z_{n+1} = z_1$ ,  $z_{n+2} = z_2$  etc. folglich  $D_{n+1,nr} = D_{1,n(r-1)} = N_{r-1}$  und  $D_{n+2,nr} = D_{2,n(r-1)} = Z_{r-1}$  ist,

$$\begin{aligned} Z_r &= D_{2,n} N_{r-1} + D_{2,n-1} Z_{r-1} \quad \text{und} \\ N_r &= D_{1,n} N_{r-1} + D_{1,n-1} Z_{r-1}. \end{aligned}$$

Auch die 12) lässt sich mittels der 3) oder 7) und 8) angeben, indem man recurrirend  $Z_r$  und  $N_r$  durch vorausgehende  $Z$  und  $N$  ausdrückt. Man findet der Reihe nach:

$$\begin{aligned} N_r &= D_{1,n} N_{r-1} + D_{1,n-1} Z_{r-1} \\ &= D_{1,n} (D_{1,n} N_{r-2} + D_{1,n-1} Z_{r-2}) + D_{1,n-1} (D_{2,n} N_{r-2} + D_{2,n-1} Z_{r-2}) \\ &= (D_{1,n}^2 + D_{1,n-1} D_{2,n}) N_{r-2} + D_{1,n-1} (D_{1,n} + D_{2,n-1}) Z_{r-2} \end{aligned}$$

oder, indem man  $D_{1,n-1} D_{2,n}$  aus 4) berechnet und die oben definirte Determinante  $A_r$  einführt:

$$N_r = (D_{1,n} A_1 + (-1)^{n-1} N_{r-2} + D_{1,n-1} A_1 Z_{r-2}$$

und in derselben Weise weiter:

$$N_r = (D_{1,n} A_2 + (-1)^{n-1} A_1) N_{r-3} + D_{1,n-1} A_2 Z_{r-3}$$

und allgemein:

$$N_r = (D_{1,n} A_s + (-1)^{n-1} A_{s-1}) N_{r-s-1} + D_{1,n-1} A_s Z_{r-s-1},$$

wie sich durch eine vollständige Induction leicht nachweisen lässt; schliesslich erhält man (für  $s = r-2$ ) unter Berücksichtigung der Werte  $N_1 = D_{1,n}$  und  $Z_1 = D_{2,n}$

$$\begin{aligned} N_r &= (D_{1,n} A_{r-2} + (-1)^{n-1} A_{r-3}) D_{1,n} + D_{2,n} D_{1,n-1} A_{r-2} \\ &= (D_{1,n} A_{r-2} + (-1)^{n-1} A_{r-3}) D_{1,n} + D_{2,n-1} D_{1,n} A_{r-2} + (-1)^{n-1} A_{r-2} \end{aligned}$$

$$14) \quad N_r = D_{1,n} A_{r-1} + (-1)^{n-1} A_{r-2}.$$

Genau in derselben Weise entwickelt man:

$$Z_r = D_{2,n} A_s N_{r-s-1} + (D_{2,n-1} A_s + (-1)^{n-1} A_{r-3}) Z_{r-s-1}$$

und für  $s = r-2$

$$Z_r = D_{2,n} D_{1,n} A_{r-2} + (D_{2,n-1} A_{r-2} + (-1)^{n-1} A_{r-3}) D_{2,n}$$

$$15) \quad Z_r = D_{2,n} \cdot A_{r-1}.$$

Folglich:

$$\frac{Z_r}{N_r} = \frac{D_{2,n} A_{r-1}}{D_{1,n} A_{r-1} + (-1)^{n-1} A_{r-2}} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{A_{r-2}}{A_{r-1}}},$$

woraus sich dann wie oben die 12) ergibt.

Bezeichnet man nun wieder wie oben die beiden Wurzeln der Gleichung  $x^2 = (D_{1,n} + D_{2,n-1})x + (-1)^{n-1}$  resp. mit  $x_1$  und  $x_2$ , so dass

$$\frac{Z_r}{N_r} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x_1^{r-1} - x_2^{r-1}}{x_1^r - x_2^r}}$$

ist, so hat man

$$\frac{x_1^{r-1} - x_2^{r-1}}{x_1^r - x_2^r} = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{r-1}}{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^r},$$

wobei  $\frac{x_2}{x_1}$  ein echter Bruch ist; für  $r = \infty$  wird dann  $\lim \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^r = 0$ ;

folglich reducirt sich obiger Bruch auf  $\frac{1}{x_1}$ , so dass

$$\left(\frac{Z_r}{N_r}\right)_{r=\infty} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} + \frac{(-1)^{n-1}}{x_1}} \quad \text{oder, da } x_1 x_2 = -(-1)^{n-1} \text{ ist,}$$

$$= \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} - x_2} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} - \frac{(D_{1,n} + D_{2,n-1}) - \sqrt{(D_{1,n} + D_{2,n-1})^2 + (-1)^{n-1} \cdot 4}}{2}}$$

$$= \frac{2D_{2,n}}{D_{1,n} - D_{2,n-1} + \sqrt{\dots}};$$

oder, indem man den Nenner rational macht und dabei 4) berücksichtigt:

$$\left(\frac{Z_r}{N_r}\right)_{r=\infty} = \frac{-(D_{1,n} - D_{2,n-1}) + \sqrt{(D_{1,n} + D_{2,n-1})^2 + (-1)^{n-1} \cdot 4}}{2D_{1,n-1}},$$

woraus ersichtlich, dass der unendliche periodische Kettenbruch eine Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$D_{1,n-1}x^2 + (D_{1,n} - D_{2,n-1})x - D_{2,n} = 0$$

darstellt.



## XXI.

## Sechs Punkte eines Kegelschnittes.

Von

Herrn **Angust Scholtz**,

Professor in Buda-Pest.

1. Sechs Punkte: 123456, deren homogene Coordinaten  $x_i, y_i, z_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$  sind, liegen auf demselben Kegelschnitte, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & z_1 x_1 & x_1 y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2 z_2 & z_2 x_2 & x_2 y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3 z_3 & z_3 x_3 & x_3 y_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4 z_4 & z_4 x_4 & x_4 y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5 z_5 & z_5 x_5 & x_5 y_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6 z_6 & z_6 x_6 & x_6 y_6 \end{vmatrix} \quad 1)$$

verschwindet. Diese sechs Punkte bilden ein Sechseck, in welchem nach dem Pascal'schen Satze die drei Paare gegenüberliegender Seiten sich in drei Punkten schneiden, welche in gerader Linie liegen. Es ist bekannt, dass man aus den sechs Punkten sechzig verschiedene Sechsecke bilden kann und für jedes gilt der genannte Satz. Irgend eines dieser Sechsecke möge  $iklmnp$  und die drei Paare seiner gegenüberliegenden Seiten  $ik$  und  $mn$ ,  $lm$  und  $pi$ ,  $np$  und  $kl$  sein. Die homogenen Coordinaten dieser Geraden bezeichnen wir mit  $\xi_{ik} \eta_{ik} \zeta_{ik}$ ;  $\xi_{mn} \eta_{mn} \zeta_{mn}$  u. s. w., wobei  $\xi_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$ ,  $\eta_{ik} = z_i x_k - z_k x_i$ ,  $\zeta_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ , u. s. w. Die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten haben die Coordinaten









und

$$(\alpha\beta\gamma) = \xi_{\alpha\beta} \cdot x_\gamma + \eta_{\alpha\beta} \cdot y_\gamma + \zeta_{\alpha\beta} \cdot z_\gamma$$

$$(\alpha'\beta'\gamma') = \xi_{\alpha'\beta'} \cdot x_{\gamma'} + \eta_{\alpha'\beta'} \cdot y_{\gamma'} + \zeta_{\alpha'\beta'} \cdot z_{\gamma'}$$

bildet und davon das Product von

$$(\alpha\beta\gamma') = \xi_{\alpha\beta} \cdot x_{\gamma'} + \eta_{\alpha\beta} \cdot y_{\gamma'} + \zeta_{\alpha\beta} \cdot z_{\gamma'}$$

und

$$(\alpha'\beta'\gamma) = \xi_{\alpha'\beta'} \cdot x_\gamma + \eta_{\alpha'\beta'} \cdot y_\gamma + \zeta_{\alpha'\beta'} \cdot z_\gamma$$

subtrahirt und sich erinnert, dass

$$\xi_{\gamma\gamma'} = y_\gamma z_{\gamma'} - y_{\gamma'} z_\gamma, \quad \eta_{\gamma\gamma'} = z_\gamma x_{\gamma'} - z_{\gamma'} x_\gamma, \quad \zeta_{\gamma\gamma'} = x_\gamma y_{\gamma'} - x_{\gamma'} y_\gamma.$$

Ist in der Gleichung 7) z. B.  $\alpha = \gamma'$ , so haben wir

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta'\alpha) = \begin{vmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \xi_{\alpha'\beta'} & \eta_{\alpha'\beta'} & \zeta_{\alpha'\beta'} \\ \xi_{\gamma'\alpha} & \eta_{\gamma'\alpha} & \zeta_{\gamma'\alpha} \end{vmatrix} \quad 8)$$

Ist dagegen in derselben Gleichung 7) z. B.  $\beta = \beta'$ , so ist die Determinante rechter Hand in das Product zweier Determinanten zerlegbar. Nämlich:

$$\begin{vmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \xi_{\alpha'\beta} & \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \\ \xi_{\gamma\gamma'} & \eta_{\gamma\gamma'} & \zeta_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix} = \frac{1}{x_\beta} \cdot \begin{vmatrix} x_\beta \cdot \xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ x_\beta \cdot \xi_{\alpha'\beta} & \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \\ x_\beta \cdot \xi_{\gamma\gamma'} & \eta_{\gamma\gamma'} & \zeta_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{x_\beta} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ 0 & \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \\ (\beta_{\gamma\gamma'}) & \eta_{\gamma\gamma'} & \zeta_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix} = \frac{(\beta_{\gamma\gamma'})}{x_\beta} \cdot \begin{vmatrix} \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \end{vmatrix}$$

In der zweiten Determinante werden zu den Elementen der ersten Colonne die mit  $y_\beta$ , bezüglich  $z_\beta$  multiplicirten Elemente der zweiten und dritten Colonne addirt und berücksichtigt, dass

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha\beta} \cdot x_\beta + \eta_{\alpha\beta} \cdot y_\beta + \zeta_{\alpha\beta} \cdot z_\beta &\equiv 0 \\ \xi_{\alpha'\beta} \cdot x_\beta + \eta_{\alpha'\beta} \cdot y_\beta + \zeta_{\alpha'\beta} \cdot z_\beta &\equiv 0 \\ \xi_{\gamma\gamma'} \cdot x_\beta + \eta_{\gamma\gamma'} \cdot y_\beta + \zeta_{\gamma\gamma'} \cdot z_\beta &= (\beta_{\gamma\gamma'}). \end{aligned}$$

Da nun

$$\begin{vmatrix} \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \end{vmatrix} = x_\beta \cdot (\beta\alpha\alpha'),$$

erhalten wir den Satz:

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta'\gamma') - (\alpha\beta\gamma')(\alpha'\beta'\gamma) = (\beta\alpha\alpha')(\beta\gamma\gamma') \quad 9)$$

3) Mit Hülfe der Gleichungen 6), 8) und 9) lässt sich der Satz  
 3) auf folgende Art beweisen. Es ist



$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} \xi_{il} & \eta_{il} & \zeta_{il} \\ (kil) (mni) = & \xi_{ik} & \eta_{ik} & \zeta_{ik} \\ & \xi_{mn} & \eta_{mn} & \zeta_{mn} \end{matrix} \\
& \begin{matrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} & & \xi_{mi} & \eta_{mi} & \zeta_{mi} \\ (mln) (pil) = & \xi_{lm} & \eta_{lm} & \zeta_{lm} & , & (mil) (pni) = & \xi_{li} & \eta_{li} & \zeta_{li} \\ & \xi_{pi} & \eta_{pi} & \zeta_{pi} & & \xi_{pi} & \eta_{pi} & \zeta_{pi} \end{matrix} \\
& \begin{matrix} \xi_{il} & \eta_{il} & \zeta_{il} \\ (mil) (pil) = & \xi_{lm} & \eta_{lm} & \zeta_{lm} \\ & \xi_{pi} & \eta_{pi} & \zeta_{pi} \end{matrix}
\end{aligned}$$

Substituiert man diese Determinanten in die auf der rechten Seite der Gleichung 11) stehende Determinante, so erkennt man diese letztere als das Product von

$$\begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} & \eta_{np}\xi_{kl} - \eta_{kl}\xi_{np} & \xi_{np}\xi_{kl} - \xi_{kl}\xi_{np} & \xi_{np}\eta_{kl} - \xi_{kl}\eta_{np} \\ \xi_{mi} & \eta_{mi} & \zeta_{mi} & \eta_{ik}\xi_{mn} - \eta_{mn}\xi_{ik} & \xi_{ik}\xi_{mn} - \xi_{mn}\xi_{ik} & \xi_{ik}\eta_{mn} - \xi_{mn}\eta_{ik} \\ \xi_{il} & \eta_{il} & \zeta_{il} & \eta_{lm}\xi_{pi} - \eta_{pi}\xi_{lm} & \xi_{lm}\xi_{pi} - \xi_{pi}\xi_{lm} & \xi_{lm}\eta_{pi} - \xi_{pi}\eta_{lm} \end{vmatrix}$$

von denen die erste  $(iln)^2$ , die zweite  $A_{iklmnp}$  gleich ist. Demnach folgt aus 11)

$$\varepsilon \cdot S = A_{iklmnp} \quad 3)$$

Nach dem Obigen bedeutet  $\varepsilon$  die positive oder negative Einheit, jenachdem die Anzahl der Inversionen in  $iklmnpk$  gerade oder ungerade ist. Um den Wert von  $\varepsilon$  von der in der Gleichung 3) ausgedrückten Permutation abhängig zu machen, haben wir nur hinzuweisen, dass die Permutationen  $iklmnp$  und  $iklmnpk$  verschiedenen Classen angehören. Wir dürfen daher  $\varepsilon$  in der schon ausgesprochenen Weise bestimmen, dass  $\varepsilon = +1$  oder  $\varepsilon = -1$  ist, jenachdem die Zahl der Inversionen in  $iklmnp$  ungerade oder gerade ist.

4. Nun werden wir nachweisen, dass die Minoren der Reciprocal-Determinante der auf der rechten Seite der Gleichung 10) stehenden Determinante von den Functionen, deren Verschwinden die Projectivität der Strahlenbüschel ausdrückt, welche entstehen, wenn irgend zwei Punkte des Kegelschnittes mit denselben vier Punkten desselben verbunden werden, nur durch gewisse Factoren sich unterscheiden. Es sei  $\Delta$  die Determinante rechter Seite von 10), ihre Elemente

$$\begin{aligned}
(mni)(mil) &= a_1, & (pni)(pil) &= b_1, & (kni)(kil) &= c_1, \\
(mil)(mln) &= a_2, & (pil)(pln) &= b_2, & (kil)(kln) &= c_2, \\
(mln)(mni) &= a_3, & (pln)(pni) &= b_3, & (kln)(kni) &= c_3,
\end{aligned}$$

ihre Minoren

$$\begin{aligned} b_2 c_3 - b_3 c_2 &= \alpha_1, & c_2 a_3 - c_3 a_2 &= \beta_1, & a_2 b_3 - a_3 b_2 &= \gamma_1 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 &= \alpha_2, & c_3 a_1 - c_1 a_3 &= \beta_2, & a_3 b_1 - a_1 b_3 &= \gamma_2 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 &= \alpha_3, & c_1 a_2 - c_2 a_1 &= \beta_3, & a_1 b_2 - a_2 b_1 &= \gamma_3 \end{aligned}$$

und  $\nabla$  ihre Reciprocal-Determinante, dann ist

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} = c_1 \cdot (iln)^2 \cdot D_{ik}.$$

Nach der Gleichung 9) ist nämlich

$$\begin{aligned} (pln)(kil) - (pil)(kln) &= (iln)(kpl) \\ (pni)(kln) - (pln)(kni) &= (iln)(kpn) \\ (kln)(mil) - (kil)(mln) &= (iln)(mkl) \\ (kni)(mln) - (kln)(mni) &= (iln)(mkn). \end{aligned}$$

Daher wird

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= (iln)(kni)(kpl)(pni) \\ \beta_2 &= (iln)(kni)(mkl)(mni) \\ \alpha_3 &= (iln)(kil)(kpn)(pil) \\ \beta_3 &= (iln)(kil)(mkn)(mil), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} &= \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 = (iln)^2 \cdot (kni)(kil) \cdot [(kpl)(pni)(mkn)(mil) \\ &\quad - (mkl)(mni)(kpn)(pil)], \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} = c_1 \cdot (iln)^2 \cdot D_{ik}.$$

Nun ist bekannt, dass

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} = c_1 \Delta,$$

mithin

$$\Delta = (iln)^2 \cdot D_{ik}.$$

Aus dieser Gleichung und 10) folgt

$$\varepsilon S = D_{ik}.$$

Die Gleichung 3) zeigt zugleich, dass die Gebilde  $S$ ,  $\Delta_{iklmnp}$  und  $D_{ik}$  invariante Functionen der sechs Reihen von Grössen  $x_{iyrz_i}$  ( $i = 123456$ ) sind.

XXII.

**Aufgabe über Construction eines Kegelschnitts.**

Von

**Herrn Gustav Mamke**

in Leipzig.

---

In dem Folgenden habe ich versucht, eine geometrische Aufgabe, welche sich zwar in mehreren Werken \*) angeführt findet, doch dort keine weitere Ausarbeitung erfahren hat, in etwas eingehenderer Weise elementar synthetischer zu behandeln und einige hieraus folgende Lehrsätze über Kegelschnitte aufzustellen.

**A. Aufgabe:** Einen Kegelschnitt zu zeichnen, welcher drei gegebene Geraden berührt und einen gegebenen Punkt zum Brennpunkt hat.

**B.** Wie ändert sich der Charakter des Kegelschnitts, wenn eine der gegebenen Tangenten um einen festen Punkt gedreht wird?

**C.** Wie bewegt sich bei dieser Drehung das Centrum des Kegelschnitts?

**A. Auflösung:** Man fälle von dem gegebenen Punkte ( $F$ ) aus Senkrechte auf die Tangenten und ziehe durch die drei Fusspunkte derselben einen Kreis. Dieser Kreis ist dann der Centalkreis des Kegelschnitts, d. h. der dem Kegelschnitte concentrische Kreis, welcher ihn in den Scheiteln berührt. Das Centrum desselben ist also zugleich Mittelpunkt des Kegelschnitts. Der 2. Brennpunkt liegt auf

---

\*) Besant: Conic Sections pag. 255. N 38. (für die Ellipse).

Steiner (Geiser.): pag. 63. und pag. 156.

der Verbindungslinie des ersten Brennpunktes mit dem Centrum, in demselben Abstände von letzterm, als der erste. Der Durchmesser des Centralkreises ist die grosse Axe des Kegelschnitts.

B. Die Art des Kegelschnitts wird durch die Lage des gegebenen Punktes zum Centralkreis bedingt, und zwar ist derselbe eine Ellipse, wenn der gegebene Punkt innerhalb des Centralkreises, eine Hyperbel, wenn der Punkt ausserhalb desselben liegt, und eine Parabel, wenn der Kreis zur Geraden wird. Will man daher die Aenderung der Art des Kegelschnitts bei der Drehung der einen Tangente untersuchen, so braucht man nur die Lage des Punktes  $F$  zum Centralkreis zu betrachten.

In Fig. 1. seien  $AB$ ,  $BC$  und  $AC$  die gegebenen Tangenten und  $F$  der gegebene Punkt. Man fälle also von  $F$  aus auf die Tangenten Senkrechte; die Fusspunkte dieser seien  $U$ ,  $V$  und  $W$ . Wird nun die Tangente  $BC$  um den Punkt  $D$  gedreht, so ändert hierbei auch  $V$  seine Lage, und da Wkl.  $DFV = R$  ist, so bewegt sich  $V$  auf der Peripherie des Kreises um  $DF$ ; die beiden andern Fusspunkte  $U$  und  $W$  bleiben fest liegen. Verbindet man  $D$  mit  $A$ , dem Schnittpunkte der beiden festen Tangenten, und schneidet  $AD$  den Kreis um  $DF$  noch in  $G$ , so ist  $UFWGA$  ein Sechseck mit  $AF$  als Durchmesser; ausserdem ziehe man noch  $UW$ , so dass es den Kreis um  $DF$  in  $E$  und  $H$  schneidet.

Die Tangente  $DB$  beginne ihre Drehung als Durchmesser des Kreises um  $DF$  und zwar so, dass sich  $V$  in der Richtung des ausserhalb des Kreises um  $AF$  befindlichen Bogens  $FG$  bewegt. In der Anfangslage liegt  $V$  in  $F$ , folglich geht der Kreis um  $UVW$  durch  $F$ , was bei keinem Kegelschnitt der Fall sein kann. Bewegt sich nun  $V$  auf dem Bogen  $FE$ , so bleibt es mit  $F$  noch auf derselben Seite von  $UW$ , da  $V$  aber aus dem Kreise um  $AF$  austritt, so wird jetzt Wkl.  $UVW < UFW$ . Wird also um  $UVW$  der Kreis gezogen, so schliesst dieser den Punkt  $F$  ein. Der Kegelschnitt ist also, so lange  $V$  auf dem Bogen  $FE$  liegt, eine Ellipse. Kommt  $V$  nach  $E$ , so wird Wkl.  $UVW = 0^\circ$  oder  $UWV = 2R$ . Das Centrum des Kreises um  $UVW$  liegt aber dann im Unendlichen. Der Kegelschnitt ist in diesem Falle eine Parabel mit  $F$  als Brennpunkt und  $UWV$  als Scheiteltangente.

Durchläuft nun  $V$  den Bogen  $EG$ , so tritt es auf die andere Seite von  $UW$ , bleibt aber jetzt immer noch ausserhalb des Kreises um  $AF$ , d. h. Wkl.  $UFW$  ist jetzt  $< UAW$ , mithin auch Wkl.  $UVW + UFW < 2R$ . Wenn man also um  $UVW$  den Kreis beschreibt, so bleibt  $F$  ausserhalb desselben. Der Kegelschnitt ist aber dann eine Hyperbel.







In dem folgenden Falle seien die beiden festen Punkte  $U$  und  $W$  innerhalb des Kreises um  $DF$  gelegen (Fig. 5.).

Schneidet  $UW$  den Kreis wieder in  $E$  und  $H$ , so liegt die Mittelsenkrechte zu  $UW$  in diesem Falle zwischen den parallelen Mittelsenkrechten zu  $WH$  und  $WE$  oder  $UH$  und  $UE$ . Letztere sind aber Tangenten zweier Ellipsen, welche das Centrum des Kreises als gemeinsamen und  $U$  oder  $W$  als je zweiten Brennpunkt und den Radius ( $\frac{1}{2}DF$ ) zur grossen Axe haben. Die Mittelsenkrechte zu  $UW$  schneidet also die Ellipsen. Das Centrum durchläuft wieder diese Mittelsenkrechte zweimal, mit Ausnahme der Ellipsensehne.

Der oben für Hyperbeln aufgestellte Satz gilt also auch für zwei Ellipsen, welche jene Bedingungen erfüllen.

Tritt endlich der Fall ein, dass sich einer der Fusspunkte  $U$  und  $W$  innerhalb, der andere ausserhalb des Kreises um  $DF$  befindet, so liegt dann die Mittelsenkrechte zu  $UW$  ausserhalb zweier paralleler Ellipsen und innerhalb zweier paralleler Hyperbeltangenten, sie kann also weder die Ellipse noch die Hyperbel schneiden. Das Centrum durchläuft also dann die ganze Mittelsenkrechte zu  $UW$  zweimal.









$$\begin{aligned}
e^{et} &= \sum_0^{\infty} \frac{(e^t)^n}{n!} = \sum_0^{\infty} \frac{e^{nt}}{n!} \\
&= \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{n^m t^m}{n! m!} \\
&= 1 + \frac{t}{1} \sum_0^{\infty} \frac{n}{n!} + \frac{t^2}{2!} \sum_0^{\infty} \frac{n^2}{n!} + \dots + \frac{t^m}{m!} \sum_0^{\infty} \frac{n^m}{m!} + \dots
\end{aligned}$$

Setzt man  $y = e^{et}$ , so ist  $y_0 = e$  und

$$\frac{dy}{dt} = e^{et} e^t = ye^t$$

also

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = e.$$

Aus der vorstehenden Gleichung ergibt sich:

$$\frac{d^m y}{dt^m} = e^t \sum_0^{m-1} (m-1)_r \frac{d^r y}{dt^r}$$

also

$$\left(\frac{d^m y}{dt^m}\right)_0 = \sum_0^{m-1} (m-1)_r \left(\frac{d^r y}{dt^r}\right)_0.$$

Hieraus:

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)_0 = 2e$$

$$\left(\frac{d^3 y}{dt^3}\right)_0 = 5e$$

$$\left(\frac{d^4 y}{dt^4}\right)_0 = 15e$$

$$\left(\frac{d^5 y}{dt^5}\right)_0 = 52e$$

$$\left(\frac{d^6 y}{dt^6}\right)_0 = 203e$$

$$\left(\frac{d^7 y}{dt^7}\right)_0 = 877e$$

$$\left(\frac{d^8 y}{dt^8}\right)_0 = 4140e \text{ etc.}$$

Kiel, den 9. Decbr. 1877.

Ligowski.





















































































7. (97<sub>1</sub>). 1532. beobachtet Copernicus das Apogäum der Venus. 1532 (R. C. S. 29).

8. (99<sub>1</sub>). 1533. Juli und August beobachtet Copernicus den 1533 grossen Cometen des genannten Jahres. (I. C. S. 344—345).

9. (99<sub>2</sub>). 1533. etwa. Copernicus schreibt seinen *Commentariolus de hypothesebus motuum caelestium a se constitutis*. (I. C. S. 117—118).

10. (116<sub>1</sub>). 1537. 8. September. Astronomische Beobachtung 1537 zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

11. (117<sub>1</sub>). 1537. 10. October. Astronomische Beobachtungen zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

12. (117<sub>2</sub>). 1537. 12. October. Astronomische Beobachtungen zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

13. (117<sub>3</sub>). 1537. 16. October. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

14. (117<sub>4</sub>). 1537. 31. October. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

15. (117<sub>5</sub>). 1537. 3. November. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

16. (117<sub>6</sub>). 1537. 7. November. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

17. (118<sub>1</sub>). 1537. 12. November. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

18. (118<sub>2</sub>). 1537. 13. November. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

19. (118<sub>3</sub>). 1537. 15. November. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 339).

Es sind also 19 neue Daten für die Geschichte des Copernicus gegeben worden. Die Beobachtungen aus 1537 fallen in eine für Copernicus wichtige Zeit, in die nämlich, wo es sich um die Wahl des Dantiscus zum Bischofe von Ermland handelte, und Copernicus selbst auf der Wahlliste stand.

---













$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi \cos \psi \, d\omega, \quad B_1 = \int_0^{2\pi} \sin^3 \psi \cos \omega \, d\omega, \quad C_1 = \int_0^{2\pi} \sin^3 \psi \sin \omega \, d\omega \\
 A_2 &= - \int_0^{2\pi} \cos \psi \sin \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \, d\omega - \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos^2 \psi \cos \omega \, d\omega \\
 B_2 &= - \int_0^{2\pi} \sin \psi \sin \omega \cos \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \, d\omega - \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi \cos \psi \cos^2 \omega \, d\omega \\
 C_2 &= - \int_0^{2\pi} \sin \psi \sin^2 \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \, d\omega - \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi \cos \psi \sin \omega \cos \omega \, d\omega \quad (3) \\
 A_3 &= \int_0^{2\pi} \cos \psi \cos \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \, d\omega - \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos^2 \psi \sin \omega \, d\omega \\
 B_3 &= \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos^2 \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \, d\omega - \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi \cos \psi \sin \omega \cos \omega \, d\omega \\
 C_3 &= \int_0^{2\pi} \sin \psi \sin \omega \cos \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \, d\omega - \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi \cos \psi \sin^2 \omega \, d\omega
 \end{aligned}$$

Wie man sich leicht überzeugt, bestehen zwischen diesen neun Grössen folgende vier Relationen:

$$\begin{aligned}
 A_3 &= C_1 \\
 B_1 &= A_2 \\
 C_2 &= B_3 \\
 A_1 + B_2 + C_3 &= 0
 \end{aligned} \quad (4)$$

So hat man z. B.

$$\begin{aligned}
 B_1 - A_2 &= \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \omega \, d\omega + \int_0^{2\pi} \sin \omega \frac{\partial \sin \psi}{\partial \omega} \, d\omega \\
 &= \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \omega \, d\omega + \sin \omega \sin \psi \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \omega \, d\omega = 0
 \end{aligned}$$

da  $\psi$  und  $\omega$  nach einem vollständigen Umlauf wieder denselben Wert annehmen.

Mit Hilfe der Formeln (2) und (4) findet man endlich die Resultierende  $R$  durch die Gleichung:

$$q^2 R^2 = \alpha^2 a_{11} + \beta^2 a_{22} + \gamma^2 a_{33} + 2\alpha\beta a_{12} + 2\beta\gamma a_{23} + 2\gamma\alpha a_{31} \quad (5)$$

















wenn  $\rho$  den Halbmesser des dem sphärischen Dreiecke umschriebenen Kreises bedeutet, und zugleich  $A + B + C = 2S$  gesetzt wird:

$$\cotg \rho \cdot dE = \sin(S - A)da + \sin(S - B)db + \sin(S - C)dc.$$

Der Scheitel der Pyramide habe nun die Coordinaten  $x, y, z$  und die Endpunkte der Kantenlängen  $(r_1, r_2, r_3)$  ebenso die Coordinaten  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \dots z_3$  und die Richtungscosinusse  $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 \dots w_3$ , so dass also

$$u_1 = \frac{x_1 - x}{r_1}, \quad v_1 = \frac{y_1 - y}{r_1}, \quad w_1 = \frac{z_1 - z}{r_1}$$

$$u_2 = \frac{x_2 - x}{r_2}, \quad v_2 = \frac{y_2 - y}{r_2}, \quad w_2 = \frac{z_2 - z}{r_2}$$

$$u_3 = \frac{x_3 - x}{r_3}, \quad v_3 = \frac{y_3 - y}{r_3}, \quad w_3 = \frac{z_3 - z}{r_3}$$

ist. Dann sind die Seiten des sphärischen Dreiecks bestimmt durch:

$$\cos a = u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3$$

$$\cos b = u_3 u_1 + v_3 v_1 + w_3 w_1$$

$$\cos c = u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2$$

und zugleich ist:

$$\sin a \frac{da}{dx} = \frac{u_2}{r_3} + \frac{u_3}{r_2} - \cos a \left( \frac{u_2}{r_2} + \frac{u_3}{r_3} \right)$$

$$\sin b \frac{db}{dx} = \frac{u_3}{r_1} + \frac{u_1}{r_3} - \cos b \left( \frac{u_3}{r_3} + \frac{u_1}{r_1} \right)$$

$$\sin c \frac{dc}{dx} = \frac{u_1}{r_2} + \frac{u_2}{r_1} - \cos c \left( \frac{u_1}{r_1} + \frac{u_2}{r_2} \right)$$

Mit diesen Formeln würde man die eine Componente  $X = \frac{dE}{dx}$  finden und daraus die beiden anderen  $Y$  und  $Z$  erhalten, indem man statt der  $u$  die Buchstaben  $v$ , respective  $w$  nehme. Der Kürze halber setzen wir nun

$$\frac{\sin(S - A)}{\sin a} = U, \quad \frac{\sin(S - B)}{\sin b} = V \quad \text{und} \quad \frac{\sin(S - C)}{\sin c} = W$$

und haben dann:

$$\begin{aligned} \cotg \rho \cdot X &= \frac{1}{r_1} [-u_1(V \cos b + W \cos c) + u_2 W + u_3 V] \\ &+ \frac{1}{r_2} [u_1 W - u_2(W \cos c + U \cos a) + u_3 U] \\ &+ \frac{1}{r_3} [u_1 V + u_2 U - u_3(U \cos a + V \cos b)] \end{aligned}$$



somit, wie verlangt,

$$A_1 + B_2 + C_3 = 0$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} A_2 = B_1 = \operatorname{tge} [ & -(u_1 v_1 + u_3 v_3) V \cosh - (u_2 v_2 + u_1 v_1) W \csc \\ & -(u_3 v_3 + u_2 v_2) U \cos \alpha + (u_1 v_2 + v_1 u_2) W + (u_2 v_3 + u_3 v_2) U \\ & + (u_3 v_1 + u_1 v_3) V ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3 = C_2 = \operatorname{tge} [ & -(v_1 w_1 + v_3 w_3) V \cosh - (v_2 w_2 + v_1 w_1) W \csc \\ & -(v_3 w_3 + v_2 w_2) U \cos \alpha + (v_1 w_2 + w_1 v_2) W + (v_2 w_3 + v_3 w_2) U \\ & + (v_3 w_1 + v_1 w_3) V ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 = A_3 = \operatorname{tge} [ & -(w_1 u_1 + w_3 u_3) V \cosh - (w_2 u_2 + w_1 u_1) W \csc \\ & -(w_3 u_3 + w_2 u_2) U \cos \alpha + (w_1 u_2 + u_1 w_2) W + (w_2 u_3 + u_2 w_3) U \\ & + (w_3 u_1 + w_1 u_3) V ] \end{aligned}$$

Es finden somit auch zwischen diesen neun Coefficienten die oben erwähnten vier Gleichungen statt.

Czernowitz im October 1877.



und es reicht hin  $x, y, z$  zu bestimmen, was durch die Gleichungen geschieht:

$$m_1 x'' = -\frac{mqx}{m_2 L'}; \quad m_1 y'' = -\frac{mgy}{m_2 L'}; \quad m_1 z'' = -\frac{mgz}{m_2 L'}$$

wo  $m = m_1 + m_2$  gesetzt ist.

Sofern die Componenten der wirkenden Kraft proportional  $x, y, z$  sind, geht die Bewegung in einer Ebene von unveränderlicher Stellung, in welcher der momentane Schwerpunkt liegt, vor sich. Nimmt man diese zur Ebene der  $xy$ , so wird  $z = 0$ , und die letzte der 3 Gleichungen fällt weg.

Bezeichnet  $u$  den relativen Radiusvector, so wird

$$L' = u + \frac{m_1}{m_2} u = \frac{m}{m_2} u$$

und man hat:

$$m_1 x'' = -q \frac{x}{u}; \quad m_1 y'' = -q \frac{y}{u}$$

woraus durch Elimination von  $q$  und Integration:

$$xy' - yx' = \text{const.}$$

eine Gleichung die offenbar auch für  $q = 0$  besteht. Nimmt man den Anfang der Bewegung bei  $L' < L$  und bezeichnet die Anfangswerte der einzelnen Variabeln durch den Index 0, so wird für die ganze Dauer der Bewegung

$$xy' - yx' = x_0 y'_0 - y_0 x'_0 \quad (1)$$

Ebenso gilt durchweg die Gleichung der relativen lebendigen Kraft

$$\frac{m_1}{2} (x'^2 + y'^2) + \int_{u_0} q du = \frac{m_1}{2} (x'_0{}^2 + y'_0{}^2) \quad (2)$$

gleichviel ob  $q$  wiederholt null wird, da es stets dieselbe Function von  $u$  bleibt.

Bis zum erstenmal  $L' = L$  wird, ist

$$x' = x'_0; \quad y' = y'_0 \quad (3)$$

daher

$$x = x_0 + x'_0 t; \quad y = y_0 + y'_0 t \quad (4)$$

Nimmt man die  $y$  in der Anfangsrichtung, die  $x$  positiv nach der Anfangsbahn hin, so ist

$$x'_0 = 0$$

und alle notwendigen Data reduciren sich auf













$$u = l + \frac{\lambda \sin \alpha}{\sqrt{F}} \cos \vartheta$$

$$\xi = u \vartheta \frac{\lambda \cos \alpha}{l \sqrt{F}}; \quad \eta = u - l$$

und mit Weglassung des Terms 2. Ordnung:

$$\xi = \frac{\lambda \cos \alpha}{\sqrt{F}} \vartheta; \quad \eta = \frac{\lambda \sin \alpha}{\sqrt{F}} \cos \vartheta \quad (24)$$

In  $B$  und  $B'$  verschwindet  $\eta$ , das ist bzhw. für  $\vartheta = -R$  und  $R$ ; daher ist die Länge der Basis  $BB'$

$$2l \sin \omega = \frac{2R \lambda \cos \alpha}{\sqrt{F}}$$

In  $E$  verschwindet  $\xi$  und  $\vartheta$ , und  $\eta$  geht über in

$$h = \frac{\lambda \sin \alpha}{\sqrt{F}} \quad (25)$$

Die Neigung der Tangente gegen die Basis ist  $\nu_1 - \nu$  und zwar

$$-\operatorname{tg}(\nu - \nu_1) = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = -\operatorname{tg} \alpha \sin \vartheta \quad (26)$$

das ist in  $B$  und  $B'$

$$-\operatorname{tg}(\nu - \nu_1) = \pm \operatorname{tg} \alpha; \quad \nu = \begin{cases} \nu_1 - \alpha & \text{in } B \\ \nu_1 + \alpha & \text{in } B' \end{cases}$$

Dies differirt vom genauen Werte  $\nu = \nu_1 \mp (\alpha + \omega)$  um die Kleine 1. Ordnung  $\omega$ , eine Abweichung die durch die Division  $\partial \eta : \partial \xi$  aus einer Kleinen 2. Ordnung hervorgegangen ist.

Die Rectification der Curve gibt:

$$\sigma = \int \sqrt{\partial \xi^2 + \partial \eta^2} = \frac{\lambda}{\sqrt{F}} \int_0^R \partial \vartheta \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \vartheta}$$

das ist der Quadrant einer Ellipse, deren Halbaxen

$$\frac{\lambda}{\sqrt{F}}, \quad \frac{\lambda \cos \alpha}{\sqrt{F}}$$

sind. Deren Excentricität ist gleich der Sagitte  $CE$ , ihre kleine Halbaxe der Durchmesser eines Kreises, dessen Länge gleich der Basis  $BB'$ .

Die Krümmung der Curve ist  $\frac{\partial \nu}{\partial s}$ . Da nun aus (26) hervorgeht



$$u^2 v'^2 = u_0^2 v'_0{}^2$$

$$u'^2 + u^2 v'^2 + F(u-l)^2 = u'_0{}^2 + u_0^2 v'_0{}^2 + F(u_0-l)^2$$

Nach Elimination von  $v'$  erhält man:

$$u'^2 = u'_0{}^2 + \left( \frac{u_0 v'_0}{u} \right)^2 (u^2 - u_0^2) - F(u - u_0)(u + u_0 - 2l) \quad (30)$$

Sei  $l + \varepsilon$  das Minimum von  $u$ ; dann wird

$$\left\{ \left( \frac{u_0 v'_0}{l + \varepsilon} \right)^2 (u_0 + l + \varepsilon) - F(u_0 - l + \varepsilon) \right\} (u_0 - l - \varepsilon) = u'_0{}^2 \geq 0$$

oder, bis auf 1. Potenz von  $\varepsilon$  entwickelt

$$\left( \frac{u_0 v'_0}{l} \right)^2 (u_0 + l) - F(u_0 - l) - \left\{ (u_0 v'_0)^2 \frac{2u_0 + l}{l^3} + F \right\} \varepsilon \geq 0$$

Soll also  $\varepsilon \geq 0$  sein, so ist Bedingung:

$$\left( \frac{u_0 v'_0}{l} \right)^2 \geq F \frac{u_0 - l}{u_0 + l}$$

Ist diese nicht erfüllt, so überschreitet die Bahn den Kreis  $u = l$  nach innen, und die Bewegung ist die anfänglich betrachtete. Die Bedingung lässt sich bei noch so kleinem  $v'_0$  durch ein hinreichend kleines  $u_0 - l$  erfüllen; ist hingegen  $F(u_0 - l)^2$  eine mässige Grösse, so ist  $v'_0$  sehr gross, und zwar  $v'_0{}^{-2}$  klein von der Ordnung von  $u_0 - l$ .

Sei  $l + \alpha$  das Maximum,  $l + \beta$  das Minimum von  $u$ ; dann giebt Gl. (30), indem man  $l + \alpha$  für  $u_0$ ,  $l + \beta$  für  $u$  setzt:

$$v'_0{}^2 = F \left( \frac{l + \beta}{l + \alpha} \right) \frac{\alpha + \beta}{2l + \alpha + \beta}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes lässt sie sich in der Form darstellen:

$$u'^2 = F(l + \alpha - u)(u - l - \beta) \left\{ 1 + \frac{\alpha + \beta}{u} \left[ 1 + \frac{(l + \alpha)(l + \beta)}{(2l + \alpha + \beta)u} \right] \right\}$$

Entwickelt man bis zu 1. Potenz der Kleinen  $\alpha$ ,  $\beta$ , so erhält man:

$$\partial t = \frac{1}{\sqrt{F}} \left\{ 1 - \frac{\alpha + \beta}{2u} \left( 1 + \frac{l}{2u} \right) \right\} \frac{\partial u}{\sqrt{(\alpha + u + l)(u - l - \beta)}}$$

Setzt man

$$u = l + \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \vartheta \quad (31)$$

so wird

















































Die Form dieser Ausdrücke bleibt bestehen, wenn sich  $A_b, A_c$  auf der andern Seite von  $BC$  befinden, in welchem Falle  $a'$  negativ zu nehmen ist.

Werden die den Seitennormalen proportionalen Ausdrücke als trimetrische Coordinaten gebraucht, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} A_c &\equiv a' \sin \beta & (c - a') \sin \alpha & 0 \\ &\equiv a' \frac{2F}{ac} & (c - a') \frac{2F}{bc} & 0 \\ &\equiv a'b & a(c - a') & 0 \\ A_b &\equiv a'c & 0 & a(b - a') \end{aligned}$$

Die Verbindungsgerade zweier Punkte  $\xi_a, \xi_{a'}$  hat die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_a & \xi_a & \xi_{a'} \\ x_b & \xi_b & \xi_{b'} \\ x_c & \xi_c & \xi_{c'} \end{vmatrix} = 0$$

Sonach ist

$$A_b A_c \equiv \begin{vmatrix} x_a & a'b & a'c \\ x_b & a(c - a') & 0 \\ x_c & 0 & a(b - a') \end{vmatrix} = 0$$

oder wenn wir nur die Coefficienten der  $x_a$  schreiben:

$$A_b A_c \equiv a(a' - b)(a' - c) \quad a'b(a' - b) \quad a'c(a' - c)$$

Für  $a' = a$  wird:

$$A_b A_c \equiv (a - b)(a - c) \quad b(a - b) \quad c(a - c)$$

Zwei Gerade:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

$$a_2 x_a + b_2 x_b + c_2 x_c = 0$$

sind parallel, wenn:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Die Harmonikale des Inkreiscentrums des Axendreiecks (die gerade Polare dieses Punktes in Bezug auf die dreiseitige Curve  $ABC$ ) hat die Gleichung:

$$x_a + x_b + x_c = 0$$

Nun ist:

$$\begin{vmatrix} (a - b)(a - c) & b(a - b) & c(a - c) \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Die  $A_b A_c$  sind also für  $a' = a$  einander parallel und zwar der Harmonikalen des Inkreiscentrums.

(Archiv XXXVI. Emsmann, Entfernungsortdreieck).









rade ist sich selbst conjugirt. Ebenso muss  $a_1 \equiv a_1$  werden, wenn die Gerade  $a_1$  durch  $U$  geht. Es ist dann:

$$a_1 = a(b_1 \cos \beta + c_1 \cos \gamma + a_1 \cos \alpha - a_1 \cos \alpha - a_1 \cos \beta \cos \gamma)$$

Nun ist:

$$\sum a_1 \cos \alpha = 0$$

$$\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma = \frac{F}{ra}$$

also:

$$a_1 = -\frac{F}{r} a_1 \equiv a_1$$

Sind also  $\mathfrak{ABC}$  die Antipunkte von  $ABC$ , so sind wegen der Congruenz dieser beiden Dreiecke  $P$  und  $\mathfrak{P}$  Congruenzpunkte. So ist z. B. der Höhenschnitt des Dreiecks  $\mathfrak{ABC}$  der Punkt:

$$\cos \alpha (b \cos \alpha \cos \gamma + c \cos \alpha \cos \beta) - a \cos \beta^2 \cos \gamma^2 \equiv \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma \equiv S$$

Sind  $S, H$  Schwerpunkt und Höhenschnitt des Urdreiecks, so liegt  $S$  bezüglich  $UH$  harmonisch zu  $S$ .

## VI.

### Ueber einige Symmetriekegelschnitte.

1. Trifft eine Gerade die Seite  $BC$  des Dreiecks  $ABC$  in  $A_1$ , und  $PA_1$ , wo  $P$  ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ist, die Seiten  $AC, AB$  in  $A_b, A_c$ ; so liegen die Punkte  $A_b$  auf einem Kegelschnitt.

$P$  sei gegeben durch die Coordinaten:  $p_a, p_b, p_c$ . Die Gerade  $A_1B_1C_1$  habe die Gleichung

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c \equiv 0$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} PA_1 &\equiv a_1' - b_1 p_a - c_1 p_a \\ A_b &\equiv c_1 p \quad 0 \quad a_1' \\ A_c &\equiv b_1 p_a \quad a_1' \quad 0 \end{aligned}$$

wo

$$a_1' = b_1 p_b + c_1 p_c$$

Wir nehmen an, die Punkte  $A_b$  liegen auf dem Kegelschnitte

$$\sum g_{aa} x_a^2 + 2 \sum g_{bc} x_b x_c \equiv 0$$

Zwei von den Punkten  $A_b$  liegen auf  $BC$ , sie sind:

$$\begin{aligned} B_a &\equiv 0 \quad c_1 p_b \quad b_1' \\ C_a &\equiv 0 \quad c_1' \quad b_1 p_c \end{aligned}$$



Für diese Punkte ist

$$\begin{aligned} g_{bb} c_1^2 p_b^2 + g_{cc} b_1'^2 + 2g_{bc} b_1' c_1 p_b &= 0 \\ g_{bb} c_1'^2 + g_{cc} b_1^2 p_c^2 + 2g_{bc} c_1' b_1 p_c &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir:

$$\frac{g_{bb}}{-2g_{bc}} = \frac{p_c p_a b_1 b_1'}{p_a(b_1' c_1' + b_1 c_1 p_b p_c)}$$

Sonach ist

$$\begin{aligned} g_{aa} &= a_1 a_1' p_b p_c \\ -2g_{bc} &= p_a(b_1' c_1' + b_1 c_1 p_b p_c) \end{aligned}$$

Die Gleichung des Kegelschnittes, auf welchem die  $A_b$  liegen, ist demnach:

$$\Sigma a_1(b_1 p_b + c_1 p_c) p_b p_c x_a^2 - \Sigma p_a[(a_1 p_a + b_1 p_b)(a_1 p_a + c_1 p_c) + b_1 c_1 p_b p_c] x_b x_c = 0$$

Für  $a_1 = a$  wird:

$$\begin{aligned} g_{aa} &= a(b p_b + c p_c) p_b p_c \\ -2g_{bc} &= p_a[(a p_a + b p_b)(a p_a + c p_c) + b c p_b p_c] \end{aligned}$$

Die Gerade  $a_1$  ist in diesem Falle die unendlich entfernte der Dreiecke ebene. Die  $A_1$  liegen im Unendlichen.  $PA_1$  wird der  $BC$  parallel. Man hat den Satz:

Zieht man durch einen Punkt in der Ebene eines Dreiecks zu den Seiten desselben Parallele, so liegen die Schnittpunkte derselben mit den Seiten auf einem Kegelschnitt.

2. Es treffe eine Gerade die Seite  $BC$  des Dreiecks  $ABC$  in  $A_1$ .  $P$  sei ein beliebiger Punkt in der Ebene desselben. In  $A_1$  werde zu  $PA$  eine Parallele gezogen, welche die Seiten  $AB$ ,  $AC$  in  $A_c$ ,  $A_b$  trifft. Die Punkte  $A_b$  liegen auf einem Kegelschnitt.

Die Gerade  $A_1 B_1 C_1$  habe die Gleichung:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

Für  $P \equiv p_a$  ist

$$AP \equiv 0 \quad p_c - p_b$$

Der unendlich ferne Punkt von  $AP$  liegt auf der Geraden

$$a x_a + b x_b + c x_c = 0$$

und hat die Form

$$b p_b + c p_c - a p_b - a p_c$$

Verbinden wir diesen Punkt mit  $A_1$ , so erhalten wir die Gerade

$$\begin{aligned} & a(b_1 p_b + c_1 p_c) \quad b_1(b p_b + c p_c) \quad c_1(b p_b + c p_c) \\ & \equiv a a_1' \quad b_1 a' \quad c_1 a' \end{aligned}$$



Zwei der Punkte  $A_b$  liegen auf der  $BC$ , sie sind:

$$\begin{aligned} B_a &\equiv 0 & c_1 b_2' & - b_2 b_1' \\ C_a &\equiv 0 & -c_2 c_1' & b_1 c_1' \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise wie in den früheren Fällen erhalten wir einen Kegelschnitt

$$\begin{aligned} \Sigma g_{aa} x_a^2 + 2 \Sigma g_{bc} x_b x_c &= 0 \\ g_{aa} &= a_1 a_2 a_1' b_2' c_2' \\ 2g_{bc} &= a_2' (b_1 c_1 b_2' c_2' + b_2 c_2 b_1' c_1'). \end{aligned}$$

## VII.

### Punkte Steiner'scher Verwandtschaft.

$P$  und  $Q$  seien beliebige Punkte in der Ebene eines Dreiecks  $ABC$ .  $AP$  treffe  $BC$  in  $P_a$ . Die bezüglich  $BC$ ,  $AP_a$  harmonischen Gegenstrahlen von  $QP_a$  treffen sich in einem Punkt. Es sei

$$\begin{aligned} P &\equiv p_a & p_b & p_c \\ Q &\equiv q_a & q_b & q_c \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} P_a &\equiv 0 & p_b & p_c \\ QP_a &\equiv p_b q_c - p_c q_b & p_c q_a & - p_b q_a \end{aligned}$$

Zwei Gerade

$$\begin{aligned} a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c &= 0 \\ a_2 x_a + b_2 x_b + c_2 x_c &= 0 \end{aligned}$$

werden durch das Geradenpaar  $\kappa a_1 \pm \lambda a_2$  harmonisch geteilt. Es ist

$$\begin{aligned} AP_a &\equiv 0 & p_c & -p_b \\ BC &\equiv 1 & 0 & 0 \end{aligned}$$

Die Coordinaten der  $QP_a$  sind:

$$\begin{aligned} p_b q_c - p_c q_b &= \kappa \cdot 0 + \lambda \cdot 1 \\ p_c q_a &= \kappa \cdot p_c + \lambda \cdot 0 \\ -p_b q_a &= \kappa \cdot -p_b + \lambda \cdot 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben

$$\kappa = q_a, \quad \lambda = p_b q_c - p_c q_b$$

Die Coordinaten des harmonischen Gegenstrales von  $QP_a$  sind demnach:

$$-(p_b q_c - p_c q_b) \quad p_c q_a \quad -p_b q_a$$

Der harmonische Gegenstral von  $QP_a$  zu  $AP_a$ ,  $BC$  und der von  $QP_b$  zu  $BP_b$ ,  $CA$  haben also die Formen













Die Auflösung dieser Gleichungen gibt:

$$x = \frac{1}{3} \sqrt{\Sigma a^2 + 2\sqrt{\Sigma a^4 - \Sigma b^2 c^2}}$$

$$y = \frac{1}{3} \sqrt{\Sigma a^2 - 2\sqrt{\Sigma a^4 - \Sigma b^2 c^2}}$$

Die konische Polare des Schwerpunktes ist zugleich die kleinste Ellipse, welche nach Euler dem Dreieck  $ABC$  umschrieben werden kann. Sie hat den Flächeninhalt:

$$xy\pi = \frac{4F\pi}{3\sqrt{3}}$$

(Archiv XI).

## IX.

### Die geraden Polaren.

1. Die Gleichung der geraden Polare eines Punktes  $\xi$  in Bezug auf die Curve

$$U = f(x_a, x_b, x_c) = 0$$

lautet:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_a} x_a + \frac{\partial U}{\partial \xi_b} x_b + \frac{\partial U}{\partial \xi_c} x_c = 0$$

wenn in  $U$  für die  $x$  die  $\xi$  substituiert werden. Diese Gerade heisst auch Harmonikale, wenn  $U$  eine Curve 3. Ordnung, aus 3 Geraden bestehend, darstellt.

$P \equiv p_a$  sei ein beliebiger Punkt in der Ebene des Fundamentaldreiecks  $ABC$ . Die Gleichungen der Geraden des Dreiseites  $PBC$  sind:

$$BC \equiv x_a = 0$$

$$PB \equiv \frac{x_a}{p_a} - \frac{x_c}{p_c} = 0$$

$$PC \equiv \frac{x_a}{p_a} - \frac{x_b}{p_b} = 0$$

Sonach ist

$$PBC \equiv U_a = \xi_a \left( \frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_b}{p_b} \right) \left( \frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_c}{p_c} \right)$$

Die Harmonikale von  $\xi$  in Bezug auf das Dreiseit  $PBC$  hat die Form

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_a}{\partial \xi_a} \quad \frac{\partial U_a}{\partial \xi_b} \quad \frac{\partial U_a}{\partial \xi_c} \\ & \equiv - \frac{\partial U_a}{\partial \xi_a} \quad \frac{\xi_a}{p_b} \left( \frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_c}{p_c} \right) \quad \frac{\xi_a}{p_c} \left( \frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_b}{p_b} \right) \end{aligned}$$



$$AA_1 \equiv 0 \quad \xi_c - \xi_b$$

$AA_1$  treffen sich im Punkte  $\xi$ .

3. Die Harmonikale von  $P$  in Bezug auf das Dreieck  $ABC$ , welche die Seiten  $BC$  in  $\Pi_a$  trifft, ist zugleich die Harmonikale von  $P$  in Bezug auf das Dreieck, welches die  $A\Pi_a$  bilden.

4. Trifft eine Gerade die Seiten  $BC$  des Dreiecks  $ABC$  in  $A_1$ , ist ihre Gleichung:

$$\sum a_1 x_a = 0$$

ist die Figur  $ABCA_1B_1C_1$  eine vierseitige Curve von der Gleichung:

$$x_a x_b x_c (a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c) = 0$$

haben wir

$$U = \Pi \xi_a \sum a_1 \xi_a$$

finden wir:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_a} = \xi_b \xi_c (2a_1 \xi_a + b_1 \xi_b + c_1 \xi_c)$$

Trifft eine Gerade die Seiten  $BC$  des Dreiecks  $ABC$  in  $A_1$ , und constructirt man die gerade Polare des Punktes  $\xi$  in Bezug auf die Dreiecke  $AB_1C_1$ ; so treffen diese nach Cayley die  $BC$  in Punkten einer Curve von der Form

$$\xi_b \xi_c (2a_1 \xi_a + b_1 \xi_b + c_1 \xi_c)$$

Curve  $U$  des vierten Grades bestehe aus vier Geraden:

$$\sum a_1 x_a = \sum a_2 x_a = \sum a_3 x_a = \sum a_4 x_a = 0$$

Es ist

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_a} = \frac{a_1}{\xi_1} + \frac{a_2}{\xi_2} + \frac{a_3}{\xi_3} + \frac{a_4}{\xi_4}$$

$$\sum a_i \xi_a = \xi_i$$

Die Harmonikale von  $\xi$  in Bezug auf das Dreieck

$$\sum a_2 x_a \cdot \sum a_3 x_a \cdot \sum a_4 x_a = 0$$

hat die Form

$$\frac{a_2}{\xi_2} + \frac{a_3}{\xi_3} + \frac{a_4}{\xi_4} = \alpha,$$

was identisch ist:

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1}{\xi_1} + \alpha_1 & a_1 & a_1 \\ \frac{b_1}{\xi_1} + \beta_1 & b_1 & \beta_1 \\ \frac{c_1}{\xi_1} + \gamma_1 & c_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0$$







XXIX.

Miscellen.

---

1.

Weiterer Beitrag zur Theorie der Cissoide \*).

I.

Von einem Punkte  $P$  in der Ebene der Cissoide kann man zu dieser drei Tangenten legen und die Berührungspunkte derselben bilden ein Dreieck, das Berührungsdreieck. Wir wollen nun untersuchen, welches der Ort der Punkte ist, für welche der Flächeninhalt des Berührungsdreiecks constant ist.

Es seien  $x, y$  die Coordinaten des Punktes  $P$ , und die Parameter der Berührungspunkte ergeben sich als Wurzeln nachstehender Gleichung

$$2u^3y - x(1 + 3u^2) + a = 0 \quad (1)$$

welches die Gleichung der Tangente im Punkte  $u$  der Cissoide ist, wenn die Coordinaten ihrer Punkte als rationale Functionen des Parameters dargestellt werden, nämlich

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{1+u^2} \\ y &= \frac{a}{u(1+u^2)} \end{aligned} \quad (2)$$

Ordnen wir die Gleichung (1) nach den fallenden Potenzen von  $u$ , so erhalten wir

---

\*) Siehe dieses Archiv: Rationale ebene Curven. Teil 56. pag. 144. sowie Beitrag zur Theorie der Cissoide, ibid. Teil 57. pag. 335.













# Litterarischer Bericht

## CCXLV.

---

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo X. Roma 1877. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der Inhalt der letzten 6 Hefte ist folgender:

7. Heft. Sigmund Günther: Ueber die Anfänge und Entwicklungsstufen des Princip der Coordinaten. Ins Italienische übersetzt von Giovanni Garbieri.

8. Heft. Pietro Riccardi: Ueber ein kleines Werk von Francesco dal Sole. Ungedruckte auf ihn bezügliche Documente. B. Boncompagni: Ueber das Wort „Cumulo“, von Francesco dal Sole gebraucht im Sinne von tausend Millionen.

9. Heft. Paul Mansion: Die Mathematiker in Belgien in den Jahren 1871, 1873, 1874, 1875.

10. Heft. Schluss des Vorigen. Pietro Riccardi: Brief an B. Boncompagni zur Berichtigung einer Aussage betreffend Biagio Pelacani in der obigen Schrift von Günther.

11. Heft. P. Treutlein: Ueber einige ungedruckte Schriften bezüglich auf das Rechnen mit dem Abacus. Ins Italienische übersetzt von Alfonso Sparagna. Wörtliche Mittheilung jener Schriften.























**Annali di matematica pura ed applicata** diretti dal prof. A. Bressani in Milano, alla cooperazione dei professori: L. Cremona in Roma, Enrico Betti in Pisa, Eugenio Beltrami in Pavia, Felice Casorati in Pavia. Serie II. Tomo VIII. Anno 1877. G. Boringhieri.

Der Inhalt ist folgender:

Christoffel: Über eine besondere Classe von ganzen Linien und Kurvenstrahlen.

Bertini: Über eine Classe einleitiger involutorischer Transformationen. Einleitung.

Bressani: Über eine Classe linearer Formen.

Clebsch: Über die Theorie der linearen Formen der 6. Ordnung und die Theorie der hyperelliptischen Functionen. Zum Schluss.

Lucas: Neue Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Functionen.

Christoffel: Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen partieller Differenzialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten.

Geiser: Über die projektive Geometrie, von welcher Hauptarten eines Kegelschnitts im Raum abhängen.

Dini: Über einige Functionen, die in einem ganzen Intervall keinen Periode haben.

Betti: Über die linearen Systeme isothermer und isoperimetrischer Flächen.

Dini: Über die geographische Abbildung einer Fläche auf eine andere.

Lucas: Grundformeln und Formeln der sphärischen Geometrie.

Christoffel: Über die Fortsetzung von Stössen durch feste feste Körper.

Bertini: Untersuchungen über einleitige involutorische Transformationen in der Ebene.

Betti: Neue Theorie der Curven in der Ebene.

Betti: Über die Bewegung eines Systems von beliebiger Anzahl punktförmiger oder starrer oder fester Punkte.

Cremona: Neue Theorie der Projectivität der Ebene. Theorie der projectiven Curven und Flächen, und über ein neues Gesetz des Ausdrucks der Flächen.





Annali di matematica pura ed applicata diretti dal prof. Francesco Brioschi in Milano colla cooperazione dei professori: Luigi Cremona in Roma, Enrico Betti in Pisa, Eugenio Beltrami in Pavia, Felice Casorati in Pavia. Serie II. Tomo VIII. Milano 1877. G. Bernardoni.

Der Inhalt ist folgender:

Christoffel. Ueber eine besondere Classe von ganzen Functionen und Kettenbrüchen.

Bertini. Ueber eine Classe eindeutiger involutorischer Transformationen. Berichtigung.

Brioschi. Ueber eine Classe binärer Formen.

Clebsch. Ueber die Theorie der binären Formen der 6. Ordnung und die Trisection der hyperelliptischen Functionen. (Forts. u. Schluss).

Lucas. Neue Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.

Christoffel. Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten.

Geiser. Ueber die quadratische Gleichung, von welcher die Hauptaxen eines Kegelschnitts im Raume abhängen.

Dini. Ueber einige Functionen, die in einem ganzen Intervall keine Derivate haben.

Betti. Ueber die dreifachen Systeme isothermer und orthogonaler Flächen.

Dini. Ueber die geographische Abbildung einer Fläche auf einer andern.

Lucas. Grundformeln tricircularer und tetrasphärischer Geometrie.

Christoffel. Ueber die Fortpflanzung von Stößen durch elastische feste Körper.

Bertini. Untersuchungen über eindeutige involutorische Transformationen in der Ebene.

Hirst. Note über die Correlation zweier Ebenen.

Betti. Ueber die Bewegung eines Systems von beliebig sich einander anziehenden oder abstossenden Punkten.

Jonquières. Note über einige Fundamentaltheoreme in der Theorie der algebraischen Curven und Flächen, und über ein allgemeines Gesetz, aus dem man sie ableiten kann.

H.











Ecken eines Quadrats, 8 Lichtcentra gleicher Intensität, 3 Lichtcentra gleicher Intensität in den Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks, 4 Lichtcentra derselben Intensität in den Ecken eines Rechtecks.

H.

Das Brachy-Teleskop. Erfunden und construiert von J. Forster und K. Fritsch. Für Freunde der Astronomie, Militärs, Touristen etc. verfasst von K. Fritsch, Optiker und Mechaniker, Wien, VI. Gumpendorferstr. Nr. 31. Mit 5 Holzschnitten und 1 Lichtdrucktafel. Wien 1877. Selbstverlag. 16 S.

Von der Leistung des neuen Instruments, dessen Erfindung für den Zweck bestimmt ist, weniger Bemittelten für das praktische Studium der Astronomie mit Entbehrlichkeit grosser Fernröhre zu dienen und zugleich Transport und Aufstellung ohne jegliche Umstände zu ermöglichen, sagt der Verfasser, dass es so klein und leicht ist, dass es von der Hand eines Kindes getragen werden kann, während ein Mann Mühe hat, ein Instrument gleicher Leistung, aber nach bisherigen Systemen verfertigt, zu tragen. Die Schrift geht zuerst die Reihe der successiven Verbesserungen und Spiegelteleskope bis zum Herschel'schen durch, und beschreibt dann, wiewol sehr ungenügend, das erfundene, welches gleichfalls ein solches und zwar mit zweimaliger Reflexion ist, so dass das Auge den Stern direct vor sich hat. Beide Spiegel sind von versilbertem Glas. Der grössere, auf den der Strahl zuerst auffällt, ist parabolisch geschliffen und befindet sich neben dem Ocularrohr, der zweite, kleinere, ein Planspiegel, in einiger Entfernung vor demselben. Hierauf wird von der Behandlung des Apparats, dann erst im allgemeinen von den Vorzügen der Reflectoren vor den Refractoren gesprochen, dann insbesondere folgende Vorzüge des gegenwärtigen Brachyteleskops genannt. Der grosse Spiegel ist nicht durchbrochen, daher das Bild eine grosse Lichtstärke und Schärfe besitzt. Der kleine Spiegel steht nicht mitten im Strahlengange des grossen, welcher Umstand ebenfalls zur Vermehrung der Helligkeit und Präcision des Bildes beiträgt. Das Instrument ist viel kürzer als ein Newton'sches. Der Gegenstand ist vor dem Beobachter, nicht links von ihm oder gar hinter ihm, was für die Orientirung angenehmer ist. Im Anhang empfiehlt der Verfasser ein Spectrometer mit Doppelaxen-System, welches in Lichtdruck abgebildet ist.

H.









# Preisaufgaben

der

## Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft

in

### Leipzig.

---

#### Mathematisch-naturwissenschaftliche Section.

##### 1. Für das Jahr 1878.

Die Entwicklung des reciproken Werthes der Entfernung  $r$  zweier Punkte spielt in astronomischen und physikalischen Problemen eine hervorragende Rolle. In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird die zuerst von Cauchy entdeckte Gleichung bewiesen

$$\frac{a}{r} \left( 1 + 2e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}} + 2e^{-\frac{4\pi a^2}{r^2}} + 2e^{-\frac{9\pi a^2}{r^2}} + 2e^{-\frac{16\pi a^2}{r^2}} \dots \right) =$$

$$= 1 + 2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{16\pi r^2}{a^2}} \dots$$

in welcher mit Rücksicht auf die zu erzielende Genauigkeit die positive willkürliche Constante  $a$  so gross gewählt werden kann, dass die Exponentialgrösse  $e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}$  vernachlässigt werden darf. Alsdann hat man

$$\frac{a}{r} = 1 + 2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}} + \dots$$

eine Reihenentwicklung von ungemein rascher Convergenz. Es steht zu erwarten, dass eine auf die vorstehende Formel gegründete Entwicklung der Störungsfunction in dem Problem der drei Körper sich für die numerische Rechnung als vorthellhaft erweisen werde.

Die Gesellschaft wünscht eine unter dem angegebenen Gesichtspunkte ausgeführte Bearbeitung des Störungsproblems zu erhalten.











# Litterarischer Bericht

CCXLVII.

## Methode und Principien.

Die Ausdehnungslehre von 1844 oder Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert von Hermann Grassmann. Zweite, im Text unveränderte Auflage. Mit 1 Tafel. Leipzig 1878. Otto Wigand. 301 S.

Der Verfasser will durch einige Einführungen zu einer einfachern, mehr harmonischen Gestaltung der Elemente der Mathematik und der genannten Zweige gelangt sein. Als Summe von Punkten betrachtet er ihren Schwerpunkt, als Producte von 2, 3, 4 Punkten bzhw. die Verbindungsstrecke, die Dreiecksfläche, den Tetraederinhalt, als Producte von Linien und Ebenen deren Schnitte. Bei Vertauschung der Factoren müsse das Vorzeichen beider gewechselt werden. Der Winkel soll erst im 2. Teile vorkommen, der noch zu erwarten ist. Da das Buch in 1. Auflage bereits genügende Aufmerksamkeit und Würdigung erfahren hat, so möchte es überflüssig sein die Frage, ob es einen wirklichen Fortschritt enthalte, aufs neue zu beleuchten. Wenn jemand sich lieber mit Symbolen als mit eigentlichen Grössen und Gebilden beschäftigt, so müssen wir ihm das als Geschmackssache überlassen, jeden Versuch aber damit einen Einfluss auf den Elementarunterricht zu üben als verderblich bezeichnen.

H.























---























Anhang 1. Ueber Differentianten ausgedrückt in den Differenzen der Wurzeln ihrer verwandten Quantics.

Anhang 2. Ueber Hermite's Reciprocitätsgesetz (unbeendet).

Dass der bereits hinreichend bekannt gewordene Artikel über den irreducibeln Fall hier die lange vergeblich gesuchte Aufnahme gefunden hat, giebt der Aufmerksamkeit der Redaction kein sonderliches Zeugniß. H.

---

## Modell für den ersten Unterricht in der Goniometrie.

Der Unterzeichnete gibt bekannt, dass jenes Modell, welches er im 61. Bande dieses „Archivs“ auf S. 108. beschrieben u. abgebildet hat, von ihm käuflich zu beziehen ist.

**Preis 40 Mark.**

**F. Hoza,**  
Professor in Königgrätz.

(Das erste Exemplar wurde an die Kantonschule zu St. Gallen geliefert).

---















